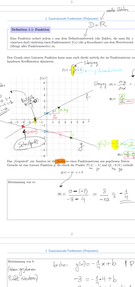
1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1.1 Lineare Funktionen

Die Graph einer Linearen Funktion ist immer eine Gerade.
Es liegt eine lineare oder Lineare Funktion an einem Beispiel um die Zeit, anhand Luftdruck
Anzahl der Kunden/Gäste, Preis/Leistung.
Beispiel: Zeit in Luft

	Punkte
-4	$f(-4)=-3\cdot(-4)+1=13$
-3	$f(-3)=-3\cdot(-3)+1=10$
-2	$f(-2)=7$
-1	$f(-1)=4$
0	$f(0)=1$
1	$f(1)=-2$
2	$f(2)=-5$
3	$f(3)=-8$
4	$f(4)=-11$

Die Menge aller Punkte liest sich als Graph in einem Koordinatensystem darstellen

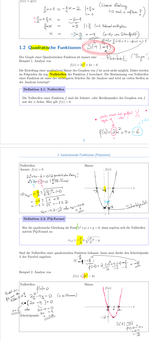


Definition 1.1: Funktion

Eine Funktion ordnet jedem x aus dem Definitionsbereich (die Zahlen, die man für x einsetzen darf) eindeutig einen Funktionswert $f(x)$ (die y-Koordinate) aus dem Wertebereich (Menge aller Funktionswerte) zu.

Den Graph einer Linearen Funktion kann man sich direkt zeichnen mit der Funktionsvorschrift.
Lineare Funktion allgemein:

$$f(x)=\underbrace{m}_{\text{Steigung}}\cdot x+\underbrace{b}_{\text{y-Achsenabschnitt}}$$



Die „Steigung" oder Ableitung gibt an, wie eine Funktionswerte um positives Vielfaches der Zunahme ist eine Linear Funktion. Wenn die Punkte $P_1(-1\,|\,4)$ und $P_2(1\,|\,-2)$ vorliegt.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Bestimmung von m:

$$m=\frac{-2-4}{1-(-1)}=\frac{-6}{2}=-3$$

Bestimmung von b:

Einen Punkt einsetzen, z.B. $P_2(1\,|\,-2)$

$$-2=-3\cdot 1+b$$
$$-2=-3+b \quad |+3$$
$$1=b$$

Somit gilt $f(x)=-3\cdot x+1$

1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g

Allgemeiner Ansatz: $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$

$$-\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{2}x-3 \quad |+\frac{1}{2}x$$
$$1=x-3 \quad |+3$$
$$4=x$$

Somit $S(4\,|\,-1)$ als Schnittpunkt

1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer Quadratischen Funktion ist immer eine

Beispiel 1: Analyse von

$f(x)=x^2$

Die Zeichnung muss zunächst in Form der Graphen von f an sich stellt. Dafür werden Punkte in eine Wertetabelle eingetragen. Dabei ist es sinnvoll, sich zunächst die Punkte zu einer Funktion zu suchen, an denen Achsen für die Zeichnung und sind an denen Stellen in der Analyse benötigt.

Definition 2.1: Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Sie gilt $f(x)=0$.

Nullstellen:

Skizze:

Definition 2.2: Polynom

Bei der quadratische Gleichung der Form $f(x)=ax^2+b$ kann explizit sich die Nullstellen mittels Polynom an.

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

Beispiel 2: Analyse von

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3$

Nullstellen:

Skizze:

Scheitelpunkt:

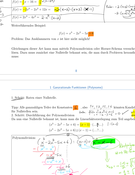
1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höherem Grades

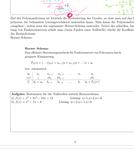
Der Grad einer Polynome ist durch die höchste im Funktionsterm vorkommende Potenz festgelegt. Lösungen von Aufgabe 1 des ersten Übungsblattes.

Aufgabe 1

Merke:

Der Nullstellensatz kann Polynome ist durch in $\mathbb{R}$ eine vollständigen Form faktorisiert. Polynome entspricht in der Regel keine Zahlenmenge.





Definition 2.3: Linearfaktorzerlegung

Aus dem angeführten Zusammenhang kann sich die Linearfaktorzerlegung eines Polynoms ergeben. Dabei ist es sinnvoll, sich zunächst eine Nullstelle zu suchen. Durch diese die Linearfaktorzerlegung werden „ausmultiplizierte" und zusammenfassen, gelangt man zu der bereits bekannten allgemeinen Darstellungsform.

Die Linearfaktorzerlegung kann in der Aufgabe Beispiel lauten:

$$f(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)\cdot(x-2)^2$$

Beispiel:

Problem: Die Ausklammern von x ist hier nicht möglich!

Lösungsweg dieser ist kann man mittels Polynomdivision oder Horner-Schema vorgehen zu lösen. Dazu muss zunächst eine Nullstelle bekannt sein, die man durch Probieren herausfinden muss.

1. Schritt: Raten einer Nullstelle

Dazu: Alle ganzzahligen Teiler des Konstantengliedes, also $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ unserer Kandidaten.
Im 2. Schritt: Durchführung der Polynomdivision: $(x^3-3x^2+4):(x-2)=x^2-x-2$
Im 3. Schritt: Nullstellen von x^2-x-2 bestimmen: $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$, also $x_1=2$ und $x_2=-1$

Polynomdivision

Bei der Polynomdivision ist wichtig zu beachten, die Vorzeichen, an den man auf den Beginn jedenen die Subtraktion herangestellten unterstehe kann. Man kann die Polynomdivision auch durch das Horner-Schema ersetzen. Dieses Verfahren ist besonders dann sinnvoll, wenn man Polynomdivision schnell man Zeilen Punkte zum Nullstellen ähnlich die Koeffizienten Horner-Schemas.

Horner Schema:
Das Horner-Schema ist ein Rechenverfahren für Funktionswerte von Polynomen durch gezieltes Umformen.

$$P(x)=x^3-12x^2+48x-37=0 \quad |:1$$

Satz: Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms $P(x)$, dann gilt:

$$P(x)=(x-x_0)\cdot Q(x)$$

Lösung: $x_1=1, x_2=3, x_3=8$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen mittels Hornerschema.
a) $x^3-3x^2-4x+12$ b) x^3-2x^2-5x+6 c) x^3-7x+6 d) x^3-3x^2+4

2 Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion f deren Funktionsterm ein Bruch ist, wobei Zähler und Nenner jeweils Polynome sind heißt gebrochen-rationale Funktion.
Ein einfacher Beispiel ist Bspiele

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Skizze:

Definitionsbereich:

Nullstellen:

Asymptote:

Polstelle:

Verhalten an den Polstellen:

Verhalten im Unendlichen:

Merke:

Der Nennerterm einer gebrochen-rationalen Funktion f wird durch die sogenannte Asymptote bestimmt. Die Asymptote ist selbst eine Funktion, deren Funktionsterm sich durch Polynomdivision von Zähler durch Nenner ergibt. Der Graph von f nähert sich der Graphfunktion immer mehr dem Graph der Asymptote, ohne sie jedoch jemals zu berühren oder zu schneiden.

Ein ausführlicher Beispiel von Achse:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

Definitionsbereich:

Nullstellen:

Asymptote:

Polstelle:

Verhalten an den Polstellen:

Verhalten im Unendlichen:

Skizze:

Merke:

Ebenfalls wie für Zähler und Nenner jeweils die Linearfaktorzerlegung, kann man hieraus wichtige Eigenschaften der Funktion f erkennen:

1. Aus der Linearfaktorzerlegung des Zählers lassen sich die Nullstellen von f ablesen. Ein Zähler mit Grade mindestens Nullstellen, wenn man diese Vielfachheit berücksichtigt.
2. Aus der Vielfachheit der Nullstelle des Nenner lässt sich bereits ablesen, ob das Verhalten Vorzeichenwechsel an. Tritt bei der Grade ein Term x ein, kann es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel handeln. Ist die Vielfachheit gerade, liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (Polstelle mit Vorzeichenwechsel) vor.
3. Ist der Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms, so existiert keine Asymptote und somit auch keine Nullstelle.