20.02.2024

Montag, 19. Februar 2024 21:56

3 Folgen und Grenzwerte

$\overset{a_n}{f(n)} = \frac{1}{n}$ mit $D = \mathbb{N}$

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$a_1 = \frac{1}{1} = 1$

$a_2 = \frac{1}{2}$

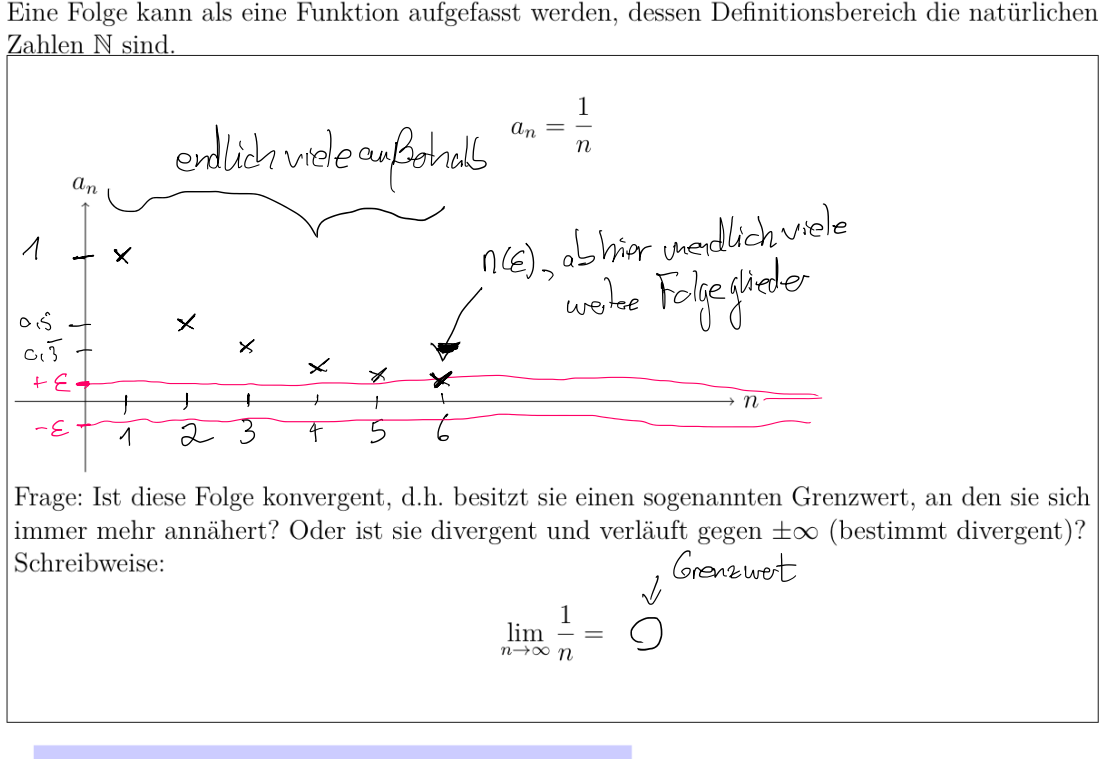
$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

$\vdots$

3.1 Folgen

Eine Folge kann als eine Funktion aufgefasst werden, dessen Definitionsbereich die natürlichen Zahlen ℕ sind.



Frage: Ist diese Folge konvergent, d.h. besitzt sie einen sogenannten Grenzwert, an den sie sich immer mehr annähert? Oder ist sie divergent und verläuft gegen ±∞ (bestimmt divergent)? Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \overset{\text{Grenzwert}}{0}$$

Theorie:

Definition 1.1: Grenzwert einer Zahlenfolge

g ist Grenzwert einer Folge a_n, wenn es zu jedem noch so kleinen vorgegebenen $\epsilon > 0$ eine (von ϵ abhängige Zahl $n(\epsilon)$ gibt), so dass für alle $n \geq n(\epsilon)$ gilt: $|a_n - g| < \epsilon$ (also wenn in jeder ϵ-Umgebung von g fast alle Glieder der Folge liegen, bis auf endlich viele davor).

Nachweis, dass 0 der Grenzwert von $a_n = \frac{1}{n}$ ist:

Sei ε>0 beliebig klein.

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad |\cdot n$

$1 < \varepsilon \cdot n \quad |:\varepsilon$

$\boxed{\frac{1}{\varepsilon} < n}$

z.B.: $\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{1}{0{,}01} = 100$

ab $n = 101$

Praxis:

Merke:

Obige Folge ist ein typisches Beispiel einer Nullfolge der Gestalt: Zähler ist konstant/beschränkt, Nenner läuft gegen ±∞.

Bsp: $a_n = \frac{1}{n^2}$ oder $a_n = \frac{3}{n^4}$ oder $a_n = \frac{-4}{n}$

Die Theorie der Grenzwerte unendlicher Folgen ist eine wichtige Grundlage in der Analysis und findet Verwendung bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen, der Definition der Ableitung (als Grenzwert einer Folge von Differenzenquotienten) und beim Riemann'schen

Integralbegriff.

In der Praxis wendet man zur Bestimmung eines Grenzwertes selten diese Definition an, sondern man benutzt die sogenannten Grenzwertsätze, um sofort das Ergebnis zu ermitteln.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und sei $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot a, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Funktionsterme der Folge können (müssen) vor Anwendung der Grenzwertsätze umgeformt (d.h. gekürzt oder erweitert) werden.

Beispiel:

① Trick: ausklammern von Potenzen!

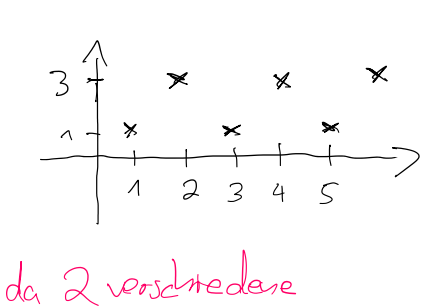
Sog. unbestimmter Ausdruck! Später de L'Hospital oder JETZT mittels Umformungen!

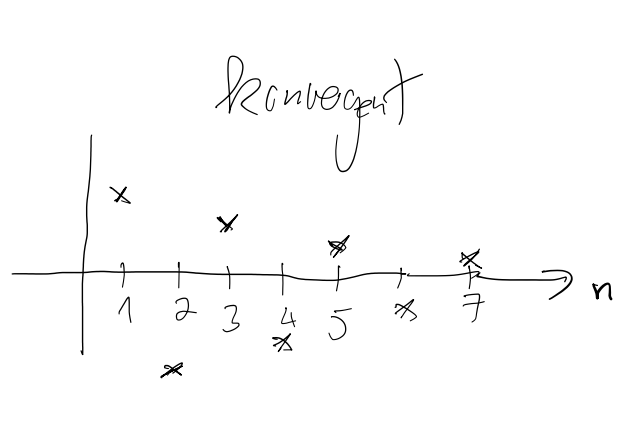
$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-2}{4n+3} \quad \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot(8 - \underbrace{\tfrac{2}{n}}_{\to 0})}{\cancel{n}\cdot(4 + \underbrace{\tfrac{3}{n}}_{\to 0})} = \frac{8}{4} = \underline{\underline{2}}$$

alternierende Folge ↳ Fallunterscheidung n gerade/ungerade

$$\lim_{n\to\infty}\big(\underbrace{(-1)^n}_{\substack{1,\text{ gerade } n \\ -1,\text{ ungerade } n}} + 2\big) = \begin{cases} 1+2 = 3, & \text{für } n \text{ gerade} \\ -1+2 = 1, & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

↳ divergent, da 2 verschiedene „Häufungspunkte" gibt





3.2 Grenzwerte von Funktionen

Das Prinzip der ϵ-Umgebung bei der Grenzwertbetrachtung von Zahlenfolgen lässt sich genauso auch auf Funktionen anwenden ($n(\epsilon)$ ist nun eine reelle Zahl und kann bei Betrachtung für $x \to -\infty$ auch negativ sein).

Der Zusammenhang mit Folgen ist auch dadurch gegeben, dass man sich bei der Betrachtung von Grenzwerten wie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ die Bewegung $x \to \infty$ auf der x-Achse als Zahlenfolge x_n vorstellen kann. Durchläuft dann x die Werte dieser Zahlenfolge x_n, so durchläuft $f(x)$ die Werte der Folge $f(x_n)$, die man sich als Zahlenfolge auf der y-Achse vorstellen kann.

Definition 2.1: Grenzwert einer Funktion

Der Grenzwert (GW) einer Funktion an der Stelle x_0 existiert und ist gleich g (rechtsseitigen GW, linksseitigen GW), d.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ bzw. $(\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = g, \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = g)$, dann wenn für jede Folge x_n im Definitionsbereich der Funktion, die gegen x_0 geht, gilt, dass die Folge $f(x_n)$ gegen g strebt.
Eingeschlossen sind die Fälle $x_0 \to \pm\infty$ und $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Da sich die Definition eine Grenzwerts einer Funktion auf die Definition von Grenzwerten von Zahlenfolgen zurückführen lässt, lassen sich auch die bereits erwähnten Grenzwertsätze auf Funktionen übertragen. Dabei müssen ggf. die Funktionsterme vor Anwendung der Grenzwertsätze

umgeformt (d.h. z.B. gekürzt oder erweitert) werden, da sogenannte unbestimmte Ausdrücke entstehen können:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0$$

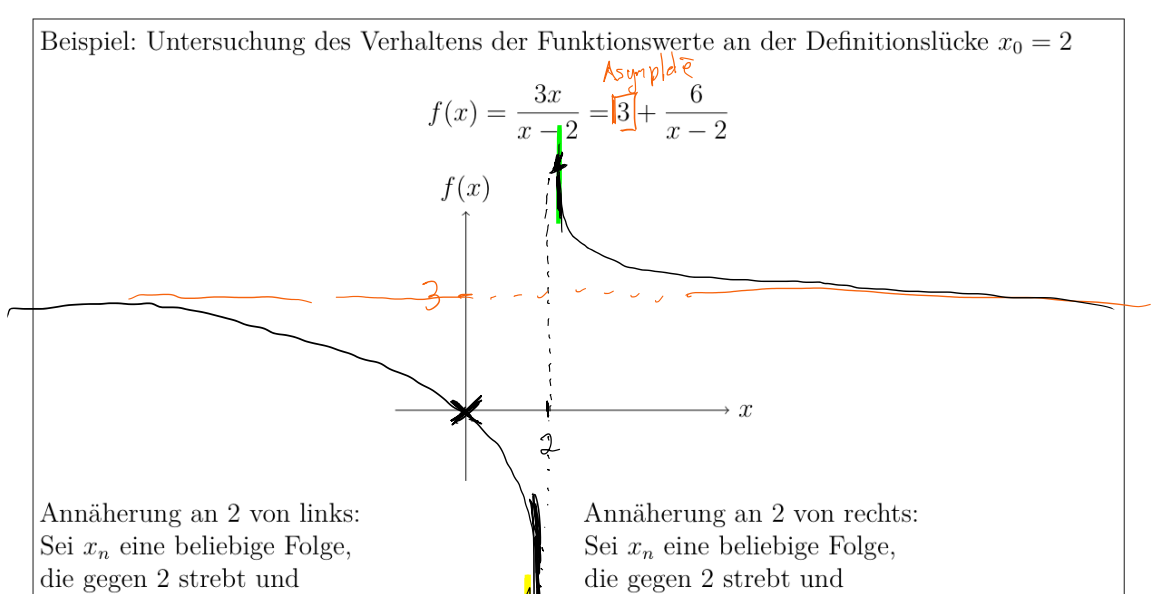
Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 + 2x^2 + x + 2) = \lim_{n\to\infty}\left(x^3\cdot\left(1 + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(x^3\cdot\left(1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to 0}\right)\right) = \underline{\underline{+\infty}}$$

Beispiel: Untersuchung des Verhaltens der Funktionswerte an der Definitionslücke $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{3x}{x-2} = \overset{\text{Asymptote}}{\boxed{3}} + \frac{6}{x-2}$$



Annäherung an 2 von links:
Sei x_n eine beliebige Folge,
die gegen 2 strebt und
deren Folgeglieder $x_n < 2$ sind.

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(3 + \frac{6}{x_n - 2}) = 3 - \infty = -\infty$

Damit ergibt sich:

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(3 + \frac{6}{x-2}) = 3 - \infty = -\infty$

Annäherung an 2 von rechts:
Sei x_n eine beliebige Folge,
die gegen 2 strebt und
deren Folgeglieder $x_n > 2$ sind.

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(3 + \frac{6}{x_n - 2}) = 3 + \infty = \infty$

Damit ergibt sich:

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}(3 + \frac{6}{x-2}) = 3 + \infty = \infty$

Näherung an x=2 alle von links

$\frac{6}{1{,}9-2} = \frac{6}{-0{,}1}$ bzw. $\frac{6}{1{,}99-2} = \frac{6}{-0{,}01}$ bzw. ......

Merke:

Geht bei einem Funktionsterm mit konstantem Zähler der Nenner gegen null, ist der Grenzwert unendlich groß (±∞).

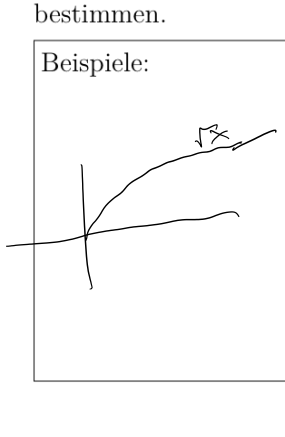
Genau wie bei den Berechnungen von Grenzwerten bei Folgen kann es sein, dass sogenannte unbestimmte Ausdrücke entstehen:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0$$

L'Hospital

Durch geschickte Umformungen (oder durch die Anwendung der Regel von de L'Hospital in den Fällen $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) kann man dann versuchen, in diesen Fällen einen möglichen Grenzwert zu bestimmen.

Beispiele:



$$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{\sqrt{x+1}}_{a} - \underbrace{\sqrt{x}}_{b}) \quad \text{„}\infty - \infty\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}+1 - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty}}_{+\infty}} \quad \frac{\text{„Konstant"}}{\text{„}\infty\text{"}} = \underline{\underline{0}}$$

Trick: 3. Binomische Formel verwenden $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

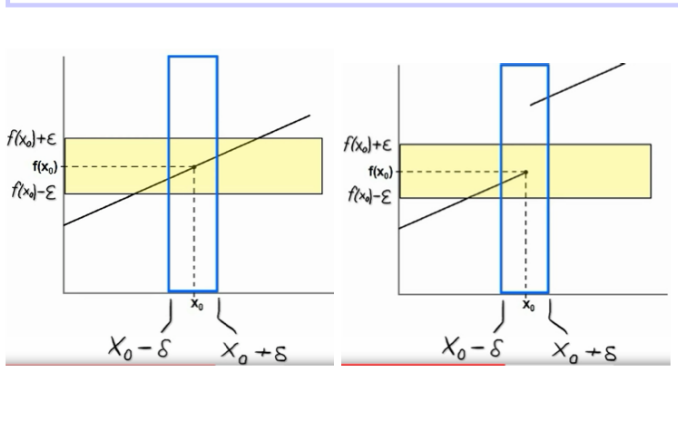
3.3 Stetigkeit

Stetigkeit bei Funktionen bedeutet, dass bei einer ein kleinen Änderung von x auch nur eine kleine Änderung von $f(x)$ passiert, dies wird durch folgende mathematische Defintion ausgedrückt.

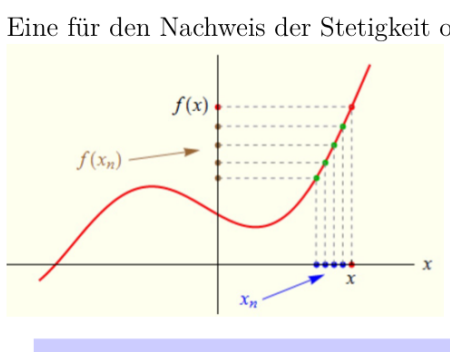
Theorie!

Definition 3.1: Stetigkeit($\epsilon - \delta$)-Umgebung

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D$ gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Dabei wird zuerst die Fehlertoleranz ϵ vorgegeben, die Schranke δ hängt von der Wahl ϵ von ab:[5]



Eine für den Nachweis der Stetigkeit oft praktischere Definition liefert das Folgekriterium [4]:



Definition 3.2: Stetigkeit - Folgekriterium

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn **für alle Folgen**$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$ Diese Definition beinhaltet, dass im Falle der Stetigkeit der Funktionswert $f(x_0)$ existieren muss. Die Funktion heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Fazit: Bei einer stetigen Funktion kann man den Limes in die Funktion hineinziehen

Aus der obigen Definition ergibt sich folgende praktische Vorgehensweise, um zu prüfen, ob eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist:

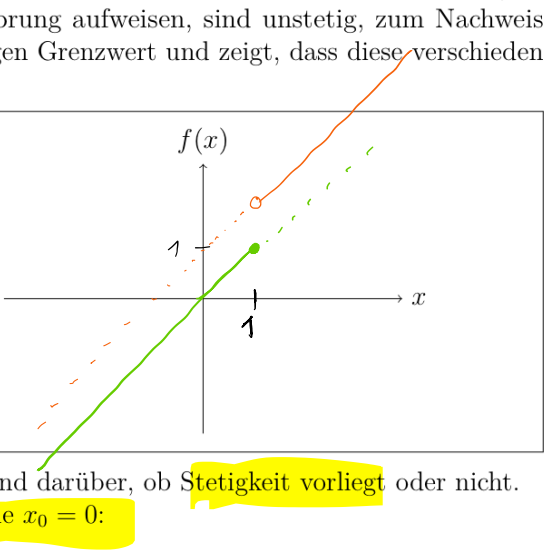
Merke: Praxis

- Die Funktion ist an der Stelle x_0 definiert und $f(x_0)$ existiert. ✓
- Der rechts- und linksseitige Grenzwert existieren, sind beide an der Stelle x_0 gleich und stimmen mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein.

Anschaulich: Kann man den Graphen einer Funktion ohne den Stift abzusetzen zeichnen, ist diese stetig. Funktionen hingegen die einen Sprung aufweisen, sind unstetig, zum Nachweis betrachtet man hier den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert und zeigt, dass diese verschieden sind.

Beispiel: abschnittsweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \leq 1 \\ x+1, & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$$



Untersuche Stetigkeit an der Stelle $x = 1$:

$f(1) = 1$ ✓

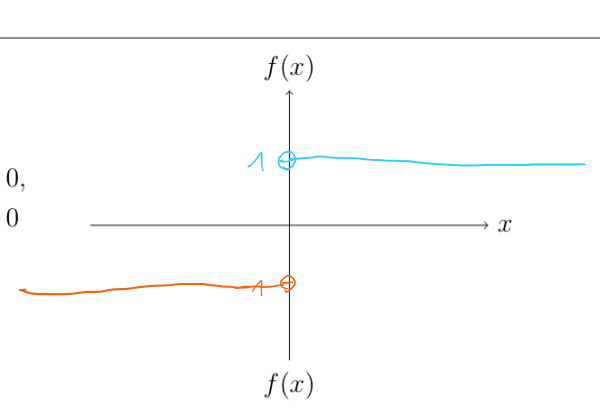
Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = \boxed{1}$ bzw. $x \to 1-$

, rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = \boxed{2}$

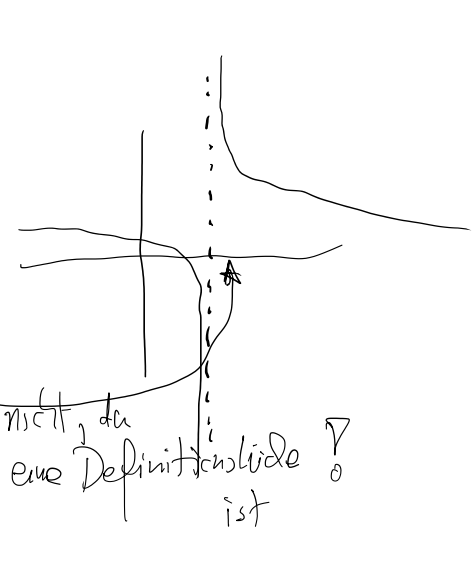
nicht stetig!

Manchmal ist der Definitionsbereich entscheidend darüber, ob Stetigkeit vorliegt oder nicht. Untersuchung jeweils auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} := \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



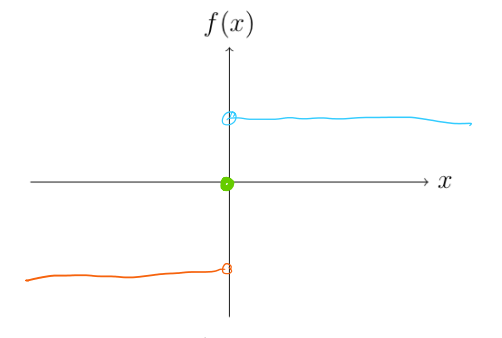
Funktion ist an der Stelle x=0 gar nicht definiert! ⟹ Frage der Stetigkeit stellt sich nicht!



auch hier nicht, da Polstelle eine Definitionslücke ist!

Signum „Vorzeichen"

$$f(x) = \text{sgn}(x) := \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

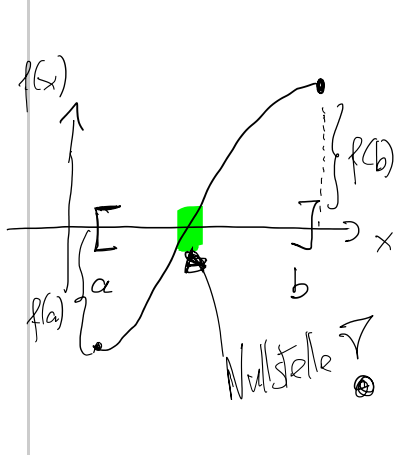


- x=0 ist definiert und f(0)=0
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1 = \underline{\underline{-1}}$ ≠ f(0)=0 $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 = \underline{1}$ Keine Stetigkeit!

Der Zwischenwertsatz drückt die Eigenschaft des „durchgezogenen Graphens" aus:

Definition 3.3: Zwischenwertsatz

Der Zwischenwertsatz sagt aus, dass eine reelle Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.
Haben insbesondere $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens einer Nullstelle, dieser Sonderfall ist als Nullstellensatz von (Bernard) Bolzano bekannt.



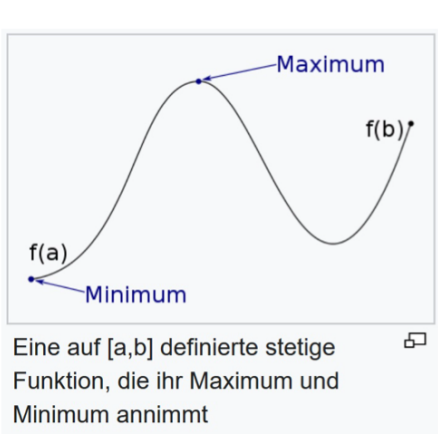
Falls f und g stetige Funktionen sind, dann sind auch stetig:

$$f \pm g, \quad k \cdot f \quad f \cdot g \quad \frac{f}{g}, \quad f(g)$$

Zudem sind auch alle Polynome und jede rationale Funktion stetig. Aud der Grenzwertbetrachtung und Anwendung des Zwischenwertsatzes kann man nun nachweisen, dass jedes Polynom ungeraden Grades (wenigstens) eine reelle Nullstelle besitzt.

Definition 3.4: Satz vom Maximum/Minimum

Es existieren stets Werte $x_0, x_1 \in [a, b]$, so dass gilt: $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. Das Maximum/-Minimum einer stetigen Funktion wird also in wenigstens einem Punkt des Definitionsintervalls angenommen.
Auch bekannt als Satz von Weierstraß[10], einem deutschem Mathematiker, 1815-1897.



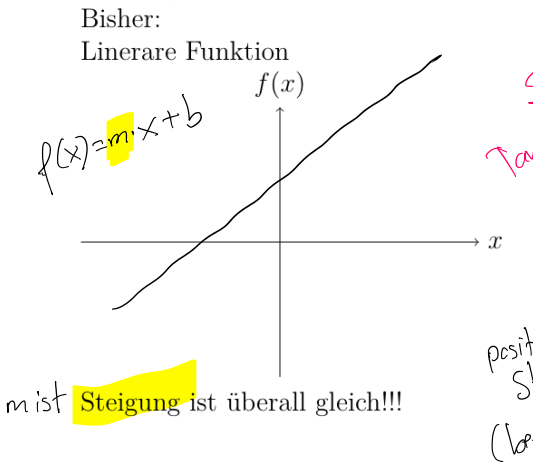
Eine auf [a,b] definierte stetige Funktion, die ihr Maximum und Minimum annimmt

4 Differentialrechnung Teil 1

4.1 Differenzenquotient

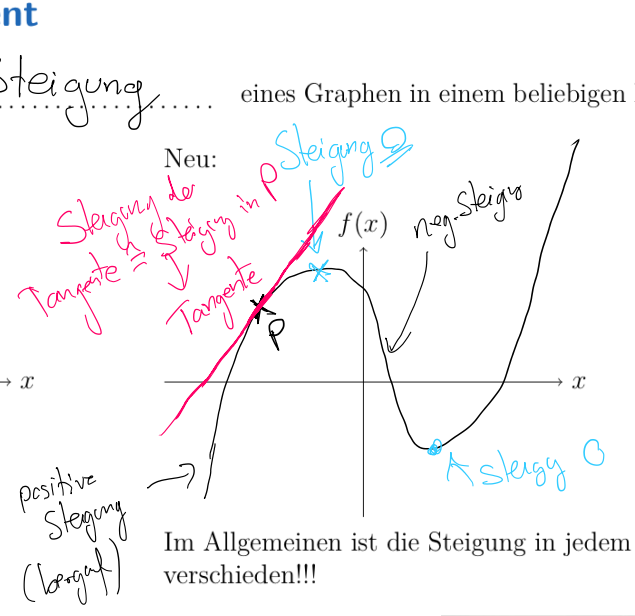
Ziel ist die Bestimmung der ....Steigung.... eines Graphen in einem beliebigen Punkt des Graphens.

Bisher:
Linerare Funktion



m ist Steigung ist überall gleich!!!

Neu:



Im Allgemeinen ist die Steigung in jedem Punkt verschieden!!!

Idee: Um die Steigung in einem Punkt zu erhalten, legt man in diesem Punkt eine sog. ....Tangente.... an. Das sogenannte Tangentenproblem geht auf den Mathematiker Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646 bis 1716) zurück.

Abbildung 4.1: Gottfried Wilhelm Leibniz[7]

Merke:

Die Tangente ist eine Gerade, die durch den Punkt verläuft und sich in der Umgebung des Punktes bestmöglich anschmiegt.
Die Steigung dieser Tangente nimmt man als Steigung im Punkt!!!

Wie gelangt man an diese Tangente?

Beispiel: $f(x) = x^2$ (Normalparabel)

Bestimmung der Steigung
im Punkt $P_1(\underset{x_1}{2} \mid \underset{y_1}{4})$:

1. Man wählt einen Punkt Q_1, der etwas weiter rechts (oder links) von P_1 liegt.

$Q_1(\underbrace{2+h}_{x_2} \mid \underbrace{(2+h)^2}_{y_2})$

2.Bilde die Steigung der sog. Sekante, die P_1 und Q_1 verbindet, und berechne deren Steigung:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

1. Bin. Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

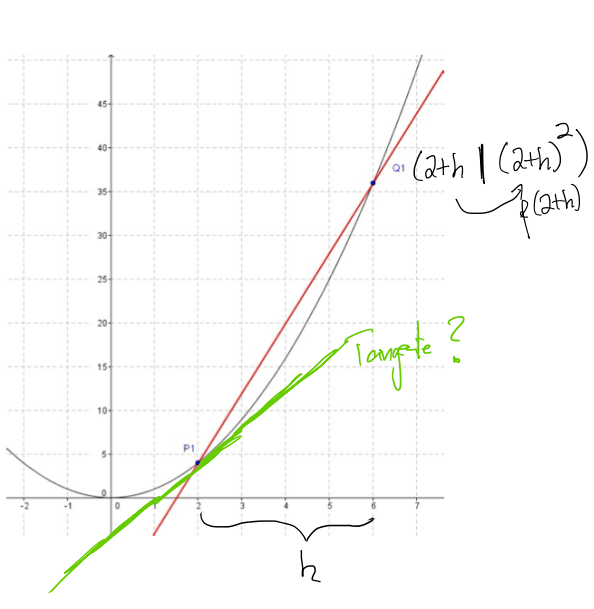
$$\underset{\text{abhängig von } h}{m(h)} = \frac{\overset{a+b}{(2+h)^2} - 4}{2+h-2} = \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h} = \frac{4h + h^2}{h}$$

3.Um die Steigung der gesuchten Tangente zu erhalten, schiebt man den Punkt Q_1 immer näher zum Punkt P_1, in dem man ..h.. gegen ..0.. laufen lässt.

$$\lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \underline{\underline{4}}$$

Grenzwert des Differenzenquotienten der Sekantensteigung

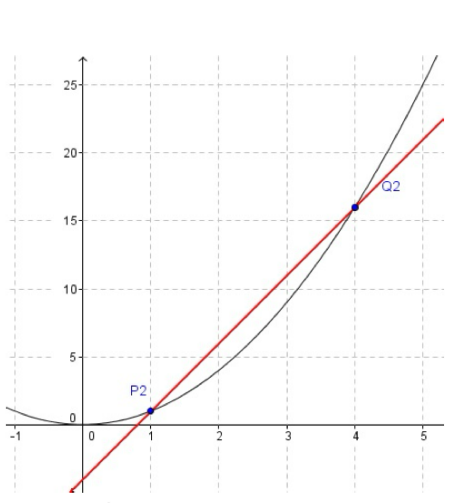
Steigung der Tangente ≙ Steigung in P_1



Bestimmung der Steigung
im Punkt $P_2(1 \mid 1)$:

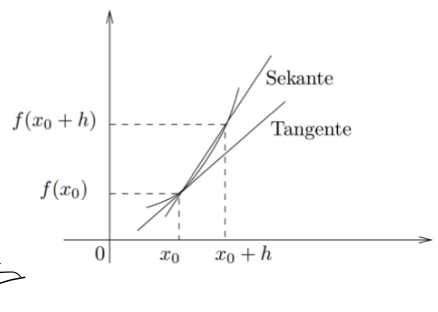
1. Man wählt einen Punkt Q_2, der etwas weiter rechts (oder links) von P_2 liegt.

$Q_2(1+h \mid (1+h)^2)$



2. Bilde die Steigung der sog. Sekante, die P_2 und Q_2 verbindet, und berechne deren Steigung:

$$m(h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1} = \frac{2h + h^2}{h}$$



3.Um die Steigung der gesuchten Tangente zu erhalten, schiebt man den Punkt Q_2 immer näher zum Punkt P_2, in dem man ..h.. gegen ..0.. laufen lässt.

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2 + h = \underline{\underline{2}}$$

Steigung in P_2

Damit man nicht für jeden Punkt eine eigene Rechnung durchführen muss, führt man die Berechnung einmalig für einen allgemeinen Punkt $P(\,x \mid x^2\,)$ durch:

allgemein: $P(x \mid x^2)$

1. Man wählt einen Punkt Q, der etwas weiter rechts (oder links) von P liegt.

$Q(x+h \mid (x+h)^2)$

2. Bilde die Steigung der sog. Sekante, die P und Q verbindet, und berechne deren Steigung:

$$m(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

3.Um die Steigung der gesuchten Tangente zu erhalten, schiebt man den Punkt Q immer näher zum Punkt P, in dem man ..h.. gegen ..0.. laufen lässt.

$$\lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}} = \underline{\underline{2x}}$$

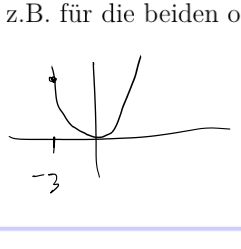
sog. 1. Ableitungsfunktion von f,

$f'(x) = 2x$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x^1$

Mittels der ersten Ableitung $f'(x)$ kann man jetzt sofort die Steigungen für beliebige Punkte berechnen, indem man deren x-Koordinaten in f' einsetzt, z.B. für die beiden obigen Beispiele:
$P_1(\,2 \mid 4\,) \Longrightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$
$P_2(\,1 \mid 1\,) \Longrightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$......
oder z.B.:
$P_3(\,-3 \mid 9\,) \Longrightarrow f'(-3) = 2\cdot(-3) = -6$......



Definition 1.1: Ableitung

Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar in x, falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert.

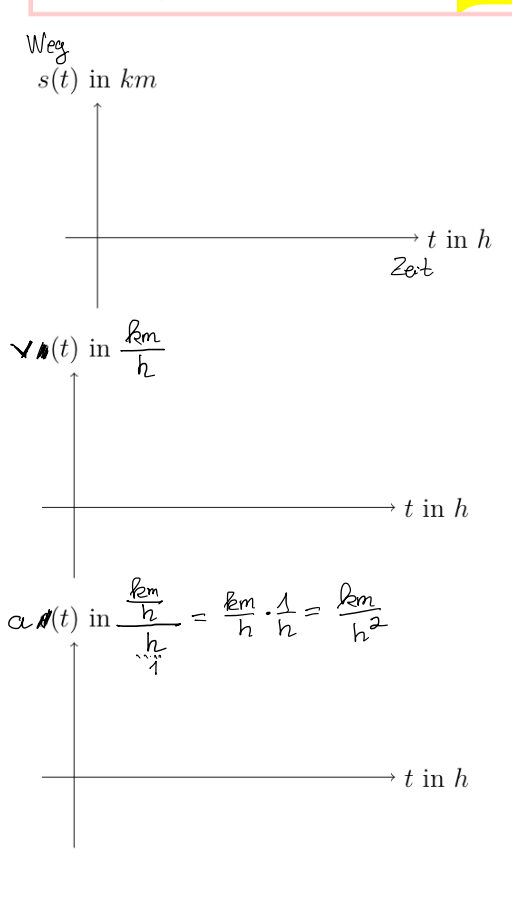
$f'(x)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x.

Eine alternative Herleitung der Ableitung ergibt sich über das sog. Geschwindigkeitsproblem von Sir Isaac **Newton** (1643-1727). Sei $s(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Weglänge eines Massepunktes bei geradliniger Bewegung.
Bei gleichförmiger Bewegung, das s-t-Diagramm ist linear $s(t) = v \cdot t$ (z.B. KFZ mit gleichbleibender Geschwindigkeit, Förderband), ist der Quotient $v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ konstant (Geschwindigkeit konstant) und damit von den Zeitpunkten t_0, t unabhängig und gibt die Geschwindigkeit v des Massepunktes an. Bei einer beschleunigten Bewegung (bei einer gleichmäßig beschleunigte Bewegung wäre das s-t-Diagramm eine Parabel $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$) kann dieser Quotient nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit sein. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 ergibt sich dann als Grenzwert $v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

Abbildung 4.2: Sir Isaac Newton[8]

Merke:

Da für die Steigung einer Tangente bekanntlich gilt $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ergibt sich die Einheit der Ableitungsfunktion ebenfalls als Quotient der Einheiten der y-Achse und x-Achse.



$s(t)$ „Weg"

$\big\downarrow s'$

$v(t)$ „Geschwindigkeit"

$\big\downarrow v'$

$a(t)$ „Beschleunigung"

Definition 1.2: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$) definiert und stetig ist. Außerdem sei die Funktion f im offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Unter diesen Voraussetzungen gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

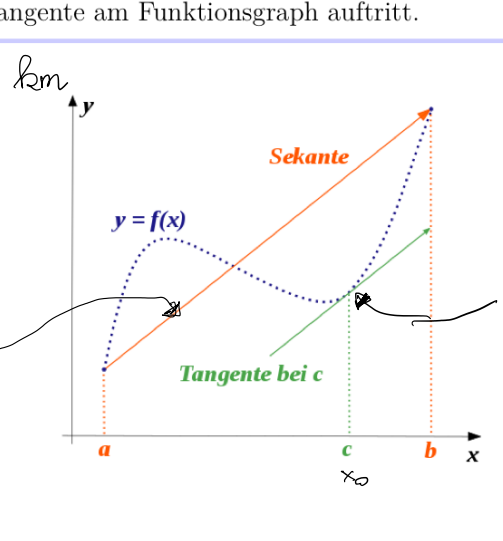
$$f'(\underset{c}{x_0}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gilt. Geometrisch gedeutet bedeutet dies, dass die Sekantensteigung an mindestens einer Stelle zwischen a und b als Steigung der Tangente am Funktionsgraph auftritt.

Steigung der Tangente ≙ Momentangeschwindigkeit

Im obigen Zusammenhang wo f die Strecke abhängig von der Zeit beschreibt, sagt der Mittelwertsatz aus, dass in der Zeit zwischen a und b man mindestens zu einem Zeitpunkt so schnell gewesen sein muss, wie die Durchschnittsgeschwindigkeit.

≙ Steigung der Sekante



Momentangeschwindigkeit zur Zeit c

4.2 Ableitungsregeln

Im Folgenden seien die Funktionen f, g an der Stelle x differenzierbar.

Definition 2.1: Potenzregel

Für die Ableitung von Potenzfunktionen gilt:

Merke: Exponent nach vorne ziehen, danach wird dieser um 1 verringert

$$f(x) = x^n \quad , n \in \mathbb{Q}$$
$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

rationale Zahlen ≙ alle Brüche

Beispiele:

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^{-2}$ $\quad f'(x) = -2x^{-3}$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Definition 2.2: Faktorregel

Faktor bleibt beim Ableiten erhalten

$$f(x) = c \cdot x^n \quad , n \in \mathbb{Q}$$
$$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Beispiele:

$f(x) = 2 \cdot x^3$
$f'(x) = 2 \cdot 3x^2$
$= 6x^2$

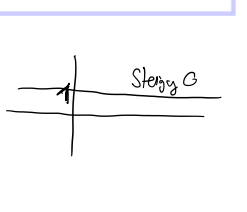
$f(x) = 7 \cdot x^4$
$f'(x) = 7 \cdot 4x^3$
$= 28x^3$

Definition 2.3: Summenregel

Jeder Summand kann getrennt abgeleitet werden!

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 + \cancel{0}$$



Merke:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{und} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$f' \downarrow \quad \downarrow f'$

$-2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$f' \downarrow \quad \downarrow f'$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$