Blatt3-Uebungen_Ableitungsregeln

Montag, 19. Februar 2024 22:02

Blatt3-Uebungen...

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung Teil 1

Aufgabe 1 Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitungsfunktion

1) $f(x) = 8x^2 - 21$
$f'(x) = 16x$

2) $f(x) = -10x^3 - x^2$
$f'(x) = -30x^2 - 2x$

3) $f(x) = -\frac{10}{9}x^{18} - 11x$, $f'(x) = -20x^{17} - 11$

4) $f(x) = 2x^2 - 1x - 1$, $f'(x) = 4x - 1$

5) $f(x) = \frac{2x^{14}}{7} = \frac{1}{7} \cdot 2x^{14}$, $f'(x) = \frac{28}{7}x^{13} = 4x^{13}$

6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1x + 5$
$f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

7) $f(x) = \frac{6}{x^1} = 6 \cdot \frac{1}{x} = 6 \cdot x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -6x^{-2} = -6 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-6}{x^2}$

8) $f(x) = -\frac{1}{12x^3} - \frac{3}{5}x^5 + 400 = -\frac{1}{12}x^{-3} - \frac{3}{5}x^5 + 400$
$-\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^3}$
$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-4} - 3x^4$
$= \frac{1}{4x^4} - 3x^4$

9) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3\sqrt{x} - 7$
$f(x) = x^{-2} + 3x^{\frac{1}{2}} - 7$
$f'(x) = -2x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 2

a) Die erste Ableitung f' einer Funktion f an der Stelle x_0 gibt dort die Steigung an.
$f'(x_0)$

b) Bestimmen Sie die Steigung von $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ an der Stelle (x-Wert) $x_0 = -2$.
$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$, also $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$

c) Ergänzen Sie die fehlenden Teile, wenn $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ ist:
$f'(x) = 6x + 4$

Die Steigung an der Stelle $x = 2$ ist $f'(2) = 16$

⇕

Steigung der Funktion f in $P(2 | 21)$
$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 12 + 8 + 1 = 21$

⇕

Steigung der im Punkt P angelegten Tangente an der Stelle $x = 2$ beträgt 16.

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung Teil 1

d) Die Differentialrechnung wurde (unabhängig voneinander) vom deutschen Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz und dem englischen Mathematiker/Physiker Isaac Newton erfunden. Das Tangentenproblem geht auch Leibniz zurück, das physikalische Problem der Bestimmung der Momentangeschwindigkeit zu einer ungleichförmigen Bewegung zu einem bestimmten Zeitpunkt wird auf Newton zurückgeführt.

e) Ergänzen Sie folgende Tabelle

Funktion	Technische/physikalische Bedeutung	Einheit
$s(t)$	Weg/Zeit Funktion	t in h und $s(t)$ in km
$s'(t) = v(t)$	Geschwindigkeit / Zeit "	t in h und $v(t)$ in $\frac{km}{h}$
$s''(t) = v'(t) = a(t)$	Beschleunigung / Zeit "	t in h und $a(t)$ in $\frac{km}{h^2}$

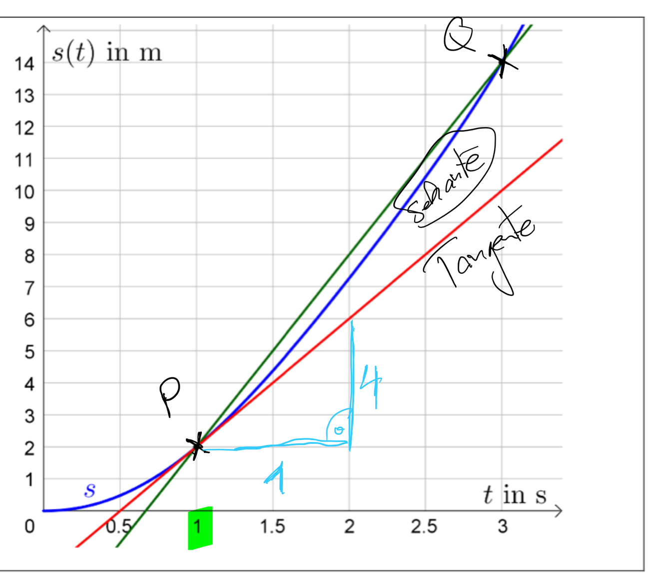
f)

Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion s ist dargestellt, wobei s(t) den zurückgelegten Weg (in m) zum Zeitpunkt t (in s) angibt.

a) Ermitteln Sie den zurückgelegten Weg im Zeitraum [1s; 3s].

b) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum [1s; 3s].
Durchschnitts-geschwindigkeit

c) Ermitteln Sie Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 1 s.



Quelle: https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Materialien/KH-Differentialrechnung.pdf

a) $s(3) - s(1)$
$= 14m - 2m = 12m$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{12m}{2s} = 6\frac{m}{s}$ ≙ Steigung der Sekante von P und Q

c) Abgelesen:
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = 4\frac{m}{s}$ ≙ Steigung der Tangente an der Stelle $t = 1$
≙ $s'(1)$

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung Teil 1

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Ableitung mittels Produktregel

1) $f(x) = 23x^2 \cdot e^x$

2) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

3) $f(x) = 19x^2 \cdot \ln(x)$

4) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) - \frac{3}{\pi}$

5) $f(x) = ax^2 \cdot 5^3 \sin(x) + 17ax^3$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Ableitung mittels Quotientenregel

$f(x) = \frac{4x+2}{7x^2}$

$y(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

$f(x) = \frac{21e^x}{7x+1}$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die erste Ableitung mittels Kettenregel

1) $f(x) = (2x+1)^7$

2) $f(x) = \sqrt{(x+4)^3}$

3) $f(t) = \ln\left(\frac{5}{2}t^2 + 14\right)$

4) $f(x) = \sin^2(x)$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-6}}$

6) $f(x) = e^{x^2+\sqrt{x}}$

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung Teil 1

Aufgabe 5

Berechnen Sie $f'(x)$.

(a) $f(x) = (2x)^{\sin(x)}, \quad x > 0$ (b) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0$

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die erste Ableitung

1) $f(x) = \frac{1}{2x+4}$

2) $f(x) = \cos(7x+8)$

3) $f(x) = (x^2+1)\sin(x)$

4) $f(x) = 12xe^{x+10}$

5) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$

7) $f(x) = \cos(x^2)$

8) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

9) $f(x) = x \cdot e^{-5x^2}$

Quelle: https://elearning.th-wildau.de/mod/book/view.php?id=122085&chapterid=198