

5 Differentialrechnung Teil 2

5.1 Graphisches Ableiten

Im Folgenden sollen Zusammenhänge zwischen dem Graph einer Funktion und dem Graph deren Ableitung identifiziert werden.

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

f hat	f' hat
Maximum	Schnellste US von f
Minimum	Schnellste NS von f
Wendepunkt	f hat ein lok. Extremum
Sattelpunkt	f hat eine beständ. NS hat

26

5.2 Berechnung von Extrema

Die zuvor festgestellten Zusammenhänge werden nun für die Berechnung von Extrema verwendet, am Beispiel von:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

1. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ (Nullstellen der 1. Ableitung)

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad | :3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad | \text{PQ}$$
$$\Rightarrow x_{0,1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ oder } x_2 = 3$$

2. Hinreichende Bedingung: 1. Möglichkeit mittels 2. Ableitung

Überprüfe $x_1 = 1$: $f''(1) = 6 - 12 + 9 = 3 > 0 \Rightarrow \text{MIN}$

Überprüfe $x_2 = 3$: $f''(3) = 6 - 12 + 9 = 3 > 0 \Rightarrow \text{MIN}$

2. Möglichkeit unter Verwendung der 2. Ableitung:

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \Rightarrow \text{MAX} \\ f''(x) > 0 \Rightarrow \text{MIN} \end{cases}$$

3. Berechnung der y-Koordinate:

$$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \Rightarrow \text{MAX}(1|4)$$
$$f(3) = 27 - 54 + 27 = 0 \Rightarrow \text{MIN}(3|0)$$

27

5.3 Berechnung der Wendepunkte

1. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ (Nullstellen der 2. Ableitung)

$$6x - 12 = 0$$
$$x = 2$$

2. Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

3. Berechnung der y-Koordinate:

$$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$$

Damit $W(2|2)$

28

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

6.1 Die e-Funktion

Die e-Funktion ist eine Exponentialfunktion mit Basis $e \approx 2,71828$, der sog. Eulerschen Zahl, benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler.

Wichtige Eigenschaften der e-Funktion sind:

- $D = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^+$ alle positiven reellen Zahlen
- $f(x) = e^x$

Merke:

Für die Ableitung der e-Funktion gilt: Die e-Funktion bleibt unverändert, davor schreibt man die Ableitung des Exponenten als Faktor (siehe Kettenregel).

Beispiel:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$$
$$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$$

30

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

Beispiele:

$$f(x) = x^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot x^{2x-1} = 2x^2 \cdot x^{2x-2}$$
$$f(x) = x^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = (2x+1) \cdot x^{2x} = (2x+1) \cdot x^{2x}$$
$$f(x) = x^{e^x} \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot x^{e^x-1} = e^x \cdot x^{e^x-1}$$
$$f(x) = x^{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = e^{2x} \cdot x^{e^{2x}-1} = e^{2x} \cdot x^{e^{2x}-1}$$
$$f(x) = e^{2x} + x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} + 2x + 4$$
$$f(x) = x^2 + e^x \Rightarrow f'(x) = 2x + e^x$$

Ein Produkt von zwei Funktionstermen kann nicht einfach einzeln, wie bei einer Summe, abgeleitet werden:

$$f(x) = x^2 + e^x \Rightarrow f'(x) = 2x + e^x$$

Definition 1.1: Produktregel (Produkt von beiden Faktoren ist die Variable vorhanden)

Die Funktionen u und v seien im gemeinsamen Definitionsbereich überall differenzierbar. Dann gilt:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

31

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

Beispiele:

$$f(x) = e^{2x} \cdot 4x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \cdot 4x + e^{2x} \cdot 4 = 8xe^{2x} + 4e^{2x} = 4e^{2x}(2x+1)$$
$$f(x) = x^{2x} \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot x^{2x-1} \cdot e^{-x} + x^{2x} \cdot (-e^{-x}) = 2x^2 \cdot e^{-x} - x^{2x} \cdot e^{-x} = x^{2x} \cdot e^{-x} (2x - 1)$$

Damit man mit der ersten Ableitung weiter rechnen kann (um beispielsweise Extrema zu bestimmen), klammert man den e-Term aus.

Übung: Klammern Sie in den Ableitungen aus obiger Übung jeweils den e-Term aus.

Exkurs: Gewinnung der Eulerschen Zahl aus der Tangente an der Stelle $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Wie ist die Basis a zu wählen, damit dieser Grenzwert 1 ergibt? Zunächst wird der Grenzwert anders notiert, indem h durch $\frac{1}{n}$ ersetzt wird.

Letzt man nun $n \rightarrow \infty$ laufen, ergibt sich als gesuchte Basis und als mögliche Definition der Eulerschen Zahl e:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

32

6.2 Die In-Funktion

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist eine sog. Logarithmusfunktion zur Basis e (natürlicher Logarithmus) und die Umkehrfunktion der e-Funktion.

Merke:

Die Umkehrfunktion existiert graphisch, wenn man den monoton steigenden (bzw. fallenden) Bereich einer Funktion betrachtet. (vgl. $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$ spiegelt). Rechnerisch erhält man diese durch Vertauschen von x und y möglicher Umformung nach y.

Skizze:

$$f(x) = \ln(x)$$

Wichtige Eigenschaften der In-Funktion sind:

- $D = \mathbb{R}^+$ nur positive Zahlen erlaubt
- $W = \mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$

6.2.1 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen

Falls die Variable im Exponenten und/oder in der Basis vorkommt, kann man die Funktion wie folgt als e-Funktion schreiben und dann ableiten:

$$f(x) = x^{2x} = e^{\ln(x^{2x})} = e^{2x \cdot \ln(x)}$$
$$f'(x) = e^{2x \cdot \ln(x)} \cdot (2 \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x}) = x^{2x} \cdot (2 \ln(x) + 2) = 2x^{2x} \cdot (\ln(x) + 1)$$

33

6.3 Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich an der Stelle x differenzierbar und es gilt $v(x) \neq 0$, dann gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2-1) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$$

34

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

7.1 Die sin(x)-Funktion

Die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist eine sogenannte trigonometrische Funktion. Man erhält den Graphen, indem man abhängig vom Winkel x, der auf der x-Achse abgetragen wird, die Länge der Gegenkathete des Winkels x in Einheitskreis, also den sin(x), als y-Wert entwirft (vgl. Animation auf Wikipedia).

Eigenschaften der Sinus-Funktion:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $[-1, 1]$
- y-Achsenabschnitt: $(0, 0)$
- Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade)
- Nullstellen: $x_n = n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$
- Extremstellen: $x_{\text{Min}} = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$
- Wendestellen: $x_{\text{Wend}} = n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$

Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x) = \cos(x)$

35

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

Definition 1.1: Kettenregel für Sinus/Cosinus

Es gilt:

$$\frac{d}{dx} \sin(u) = \cos(u) \cdot u'$$
$$\frac{d}{dx} \cos(u) = -\sin(u) \cdot u'$$

Eigenschaften der Kosinusfunktion:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $[-1, 1]$
- y-Achsenabschnitt: $(0, 1)$
- Symmetrie: $\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade)
- Nullstellen: $x_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$
- Extremstellen: $x_{\text{Max}} = n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$
- Wendestellen: $x_{\text{Wend}} = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$

Definition 1.2: Kettenregel

Mit der Kettenregel lässt sich die Ableitung zweier miteinander verknüpfter, differenzierbarer Funktionen u und v bestimmen. Es gilt:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Merke: Innere Ableitung - äußere Ableitung (mit innerer Funktion eingesetzt).

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$
$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$f(x) = \cot(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$
$$f(x) = \sec(x) \Rightarrow f'(x) = \sec(x) \cdot \tan(x)$$
$$f(x) = \csc(x) \Rightarrow f'(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x)$$

36