Blatt5-Summenzeichen

Mittwoch, 21. Februar 2024   21:25

Blatt5-Summenz...

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Summen

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie

1.) $\sum_{i=1}^{5} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = 225$

2.) $\sum_{i=2}^{7}(2-i)$

3.) $\sum_{i=0}^{4}(i+1)^2 = (0+1)^2+(1+1)^2+(2+1)^2+(3+1)^2+(4+1)^2 = 1+4+9+16+25 = 55$

4.) $\sum_{i=3}^{8}\left(10-\frac{i}{2}\right)$

5.) $\sum_{i=2}^{6}(-i)^i = (-2)^2+(-3)^3+(-4)^4+(-5)^5+(-6)^6 = 4 - 27 + 256 - \;+$

6.) $\sum_{i=0}^{5}\frac{i}{i+2}$

b) Schreiben Sie als Summe

1.) $0+3+6+9+12+\ldots+30 = \sum_{i=0}^{10} 3i$

2.) $(-1)+2-3+4-5+6-7+8 = \sum_{i=1}^{8} (-1)^i \cdot i$

3.) $0+1+4+9+16+25+\ldots+400 = \sum_{i=0}^{20} i^2$

$0^2+1^2\;\;2^2\;\;3^2\;\;4^2\;\;5^2\;\;20^2$

c) Ermitteln Sie die Grenzen der Laufvariablen

1.) $\sum_{i=3}^{10}\frac{1}{i} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{10}$

2.) $\sum_{i=0}^{12}\frac{2^i}{3} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{4.096}{3}$ $\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=0}^{12} 2^i$

3.) $\sum_{i=3}^{18}(-1)^i\cdot i^2 = (-9)+16-25+\ldots+324$

Merke: Verschiebt man den Index um den Wert k nach links (rechts), muss man den Index überall durch $(i+k)$ (bzw. $(i-k)$) ersetzen:

d) Führen Sie eine Indexverschiebung durch

1.) $\sum_{i=6}^{10}(i-1) = \sum_{i=1}^{?}?$

2.) $\sum_{i=4}^{10}(i+4) = \sum_{i=?}^{8}?$

3.) $\sum_{i=5}^{10}(8-i) = \sum_{i=1}^{?}?$

4.) $\sum_{i=2}^{8}(3-i) = \sum_{i=?}^{6}?$

5.) $\sum_{i=3}^{15}(2i+3) = \sum_{i=1}^{?}?$ um 2 nach links

6.) $\sum_{i=4}^{10}(i^2-2) = \sum_{i=1}^{?}?$

1) $\sum_{i=6}^{i=10}(i-1) = \sum_{(i+5)=6}^{(i+5)=10}((i+5)-1) = \sum_{i=1}^{5}(i+4)$

um 5 nach links, d.h. ersetze i durch $(i+5)$

Quellen: http://www.juergenmeisel.de/oaiuebung/uebung/Summenzeichen.pdf

5) $\sum_{i+2=3}^{i+2=15}(2(i+2)+3) = \sum_{i=1}^{13}(2i+7)$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Summen

Aufgabe 2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt:

$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}$ **(für alle n ≥ 1)**

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf

Beweis: ① Induktionsanfang: Für $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2\cdot1-1 = 1 = 1^2$ ✓

② Induktionsschritt:

$\boxed{\text{zu zeigen ist: } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2 \quad \text{(Aussage für } n+1\text{)}}$

Es ist $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1)$

laut Induktionsvoraussetzung

$= n^2 + 2(n+1) - 1$

$= n^2 + 2n + 2 - 1$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2 \quad \square$

Aufgabe 3 Lineare Regression

(i) *Gegeben sind die Punkte $P_1(-3,\ 14)$, $P_2(-2,\ 11)$, $P_3(0,\ 5)$, $P_4(2,\ -1)$ und $P_5(8,\ -19)$. Bestimmen Sie die durch diese festgelegte* **Regressionsgerade**. *Zur Erinnerung:*

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

und $b = \bar{y} - m\bar{x}$.

(ii) *Liegt einer der Punkte P_i, $i = 1, \ldots, 5$, auf der Gerade? (Tipp: Bestimmen Sie die Gerade durch P_3 und P_4. Was fällt auf?)*

(iii) *Bestimmen Sie weiterhin den* **Korrelationskoeffizient**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y} .$$