

Blatt 4 - Aufgabe 6

Donnerstag, 22. Februar 2024 18:12

Dr. Markus Schröder



Mathematik Vorbereitungskurs Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 5

Ein Designer (Gestalter!) beschließt, seine (zylindrische) Hautcreme-Dose in einer Kugel zu verpacken. Diese soll den Radius $R = 5 \text{ cm}$ besitzen. Wie groß ist dann das maximale Volumen V des in der Kugel unterzubringenden Zylinders, überlegt er. Aus dem Mathematik-Unterricht von Herrn Fredebeul weiß er noch

$$V_{\text{Zylinder}} = r^2 \pi h,$$

und nach einigem Nachdenken erkennt er (Begründung??)

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 25 = r^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Helfen Sie ihm weiter. Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h des optimalen Zylinders. Wie groß ist sein Volumen V ? Passt eine Creme mit 300 ml hinein?

Aufgabe 6

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, dessen Graph durch die Punkte $A(1 | -32)$, $B(-2 | 4)$, $C(-3 | 0)$ und $D(0 | 0)$ verläuft.

b)

Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: Sie hat im Punkt $(0, 0)$ eine Extremstelle, in $x = 3$ eine Nullstelle und in $x = 1$ die Steigung -3 . Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung!

$$f'(1) = -3$$

c)

Bestimmen Sie den Term einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades, welche durch den Punkt $P(0 | 1)$ verläuft und an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle und ein Minimum besitzt.

Bedingungen:

b)

$$\begin{aligned} f(3) &= 0 \Leftrightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ f'(1) &= -3 \Leftrightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -3 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = -3 \\ f(0) &= 0 \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0 \\ f'(0) &= 0 \Leftrightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 27a + 9b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \end{cases}$$

c) gesucht: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow a \cdot 0^4 + c \cdot 0^2 + e = 1 \Leftrightarrow e = 1$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a + c = -1$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4a \cdot 1^3 + 2c \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 4a + 2c = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + 2c = 0 \end{cases}$$

Die folgende Tabelle gibt einige weitere „Übersetzungshilfen“ für Steckbriefaufgaben.

Text	Übersetzung in Gleichung(en)
... verläuft durch den Punkt $P(1 3)$	$f(1) = 3$
... verläuft durch den Ursprung	$f(0) = 0$
... hat eine Nullstelle bei $x = 3$	$f(3) = 0$
... schneidet die y-Achse bei 2	$f(0) = 2$
... schneidet die Gerade mit $y = 2x + 7$ auf der y-Achse	$f(0) = 7$
... hat eine lokale Maximalstelle (einen Hochpunkt) an der Stelle $x = -2$ bzw.	$f'(-2) = 0$
... hat eine lokale Minimalstelle (einen Tiefpunkt) an der Stelle $x = -2$... bzw. eine Extremstelle bei $x = -2$	
... hat einen Hochpunkt bei $H(-2 5)$	$f(-2) = 5$ und $f'(-2) = 0$
... hat einen Tiefpunkt bei $T(-2 5)$	
... berührt die x-Achse an der Stelle $x = 3$	$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$
... hat eine doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 3$	$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$
... hat im Punkt $P(1 -2)$ die Steigung 3	$f(1) = -2$ und $f'(1) = 3$
... hat an der Stelle $x = -2$ eine Tangente, die parallel zu $g(x) = 0,5x$ ist.	$f'(-2) = 0,5$
... hat einen Wendepunkt bei $P(-3 5)$	$f(-3) = 5$ und $f''(-3) = 0$
... besitzt an der Stelle $x = -1$ eine Wendetangente mit der Steigung 2	$f'(-1) = 2$ und $f''(-1) = 0$
... schneidet die erste Winkelhalbierende bei $x = 2$ senkrecht	$f(2) = 2$ und $f'(2) = -1$
... besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt.	$f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$