

Blatt6-Uebungen_Integralrechnungen

Mittwoch, 21. Februar 2024 21:27



Blatt6-
Uebungen...

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs

Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 1

a) $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

$\int (e^x + x^2) dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + C$

$\int (\cos(x) - e^{-x} + 1) dx = \sin(x) + e^{-x} + x + C$

$\int \cos(3x) dx = \sin(3x) \cdot \frac{1}{3} + C$

b) $\int (x^3 + 2x - 4) dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x + C$

$\int (e^{2x} + 3) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x + C$

$\int e^{\sqrt{x}+3} dx = \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}+3}$

$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\int (\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x) dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$

$\int (2xt^2 + 2xt - 4) dt = \frac{2}{3}xt^3 + xt^2 - 4t + C$

$\int \frac{e^{2x+3}}{e^{2x}} dx = e^3 \cdot \frac{1}{2} + C$

$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

Aufgabe 2

Swimmingpool
Ein quaderförmiger Swimmingpool mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft beschrieben durch die Zulaufatenfunktion mit

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t; \quad 0 \leq t \leq 9$

(f(t) in m³ pro Stunde, t in Stunden)

a) Gib die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu noch abläuft, und berechne die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

b) Skizziere den Graphen der Zulaufatenfunktion f.

c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Pool?

d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m³ beträgt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Integrale durch partielle Integration.

b) $\int x^2 \sin(3x) dx$

$\int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2 dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$

$\int \frac{2}{\sqrt{u}} \cdot \sin(3x) dx = \frac{2}{3} \cos(3x) - \int \frac{2}{3} \cos(3x) \cdot 2x dx$

$= -\frac{1}{3}x^2 \cos(3x) + \frac{4}{3} \int x \cos(3x) dx$

$= -\frac{1}{3}x^2 \cos(3x) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \sin(3x) \cdot x - \int \frac{1}{3} \sin(3x) \cdot 1 dx \right)$

$= -\frac{1}{3}x^2 \cos(3x) + \frac{4}{9}x \sin(3x) - \frac{4}{9} \int \sin(3x) dx$

$= -\frac{1}{3}x^2 \cos(3x) + \frac{4}{9}x \sin(3x) + \frac{4}{27} \cos(3x) + C$

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs

Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale durch geeignete Substitu

a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(16 + 2x^2)^3}}$

$\int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$

$\int 3x \cdot \sin(x^2 + 1) dx$

$\int \frac{3}{3x+1} dx = \ln|3x+1| + C$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Integrale durch Partialbruchzerlegung.

a) $\int \frac{6x + 10}{x^2 + 2x - 3} dx$

$\int \frac{3x^5 + 2x^4 + 3x^3}{x^4 - 1} dx$

$\int \frac{6x^2 - 4x - 7}{x^3 - 3x - 2} dx$

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs

Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 6

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren.

a) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$

$\int_0^1 \ln(2x) dx$

$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs

Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Volumen V der Rotationskörper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen:

a) $f(x) = \frac{1}{h}x, \quad 0 \leq x \leq h$

$f(x) = 4\sqrt{x}, \quad [0; 4]$

t³-13t²+40t

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Input

t³ - 13 t² + 40 t

Plots

Integrate t³-13t²+40t From t=0 to t=5

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Definite integral

$\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$

Integrate t³-13t²+40t From t=5 to t=8

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Definite integral

$\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = -\frac{117}{4} \approx -29.25$

Integrate t³-13t²+40t From t=8 to t=9

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Definite integral

$\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$

Roots
t = 0
t = 5
t = 8
Local maximum
max{t³ - 13 t² + 40 t} = 36 at t = 2
Local minimum
min{t³ - 13 t² + 40 t} = -400/27 at t = 20/3

Integrate t³-13t²+40t From t=0 to t=5

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Definite integral

$\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$

Integrate t³-13t²+40t From t=5 to t=8

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Definite integral

$\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = -\frac{117}{4} \approx -29.25$

Integrate t³-13t²+40t From t=8 to t=9

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

Definite integral

$\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$

Mit noch Zahlen betrachten und N/S eintragen:

$x=2: 6 \cdot 4 - 8 - 7 = A(2+0) + B(2+1)(2-2) + C(2-2)$

$3 = 3A$

$A=1$

$x=-1: 6(-1)^2 + 4(-1) - 7 = A(-1+0) + B(-1+1)(-1-2) + C(-1-2)$

$-3 = -A$

$A=3$

$x=1: 6(-1)^2 + 4(-1) - 7 = A(1+0) + B(1+1)(1-2) + C(1-2)$

$-5 = A - 2B + C$

$-10 = -2B$

$B=5$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{5}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

$= \ln|x-2| + 5 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1}$

$= -(x+1)^{-1}$

$= \frac{1}{(x+1)^1}$

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs

Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Volumen V der Rotationskörper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen:

a) $f(x) = \frac{1}{h}x, \quad 0 \leq x \leq h$

$f(x) = 4\sqrt{x}, \quad [0; 4]$