

12 Vektorrechnung

12.1 Grundlagen

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe. Vektoren können durch Pfeile dargestellt werden. Jedem Punkt P im Koordinatensystem lässt sich ein sogenannter Ortsvektor $\vec{OP}$ zuordnen, der im Ursprung beginnt und in P endet. Die Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit denen von P überein.
Beispiel: $A(2|3)$ und $B(6|1)$

Definition 1.1: Addition von Vektoren
Die Addition zweier Vektoren: Vergleiche Kraftparallelogramm in der Physik! Eine Kraft ist eine gerichtete Größe und lässt sich mittels Vektoren darstellen.
 $\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
gesamte Länge & Orientierung der Vektoren

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
Vektoren können sich parallel verschieben, dabei ändern sich nicht die Koordinaten.

12 Vektorrechnung

Definition 1.2: Multiplikation mit einem Skalar (reeller Zahl)

Bewirkt eine Veränderung der Länge bzw. der Orientierung, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert.
 $3 \cdot \vec{OA} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
Man erhält den sogenannten Gegenvektor durch Multiplikation mit -1 .
 $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Merke:
Prinzip: Endpunkt-Anfangspunkt
Verbindungsvektor $\vec{AB}$

12 Vektorrechnung

12.2 Betrag eines Vektors

Merke:
Ein Vektor $\vec{a}$ kann normiert werden, indem man ihn mit dem Kehrwert seines Betrages multipliziert.
 $\vec{a}_n = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$
Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{a}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$
 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,24$

12 Vektorrechnung

12.3 Skalarprodukt, Vektorprodukt

Definition 3.1: Skalarprodukt
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel α einschließen, liefert als Ergebnis ein **Skalar (reelle Zahl)**:
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

Merke:
In der Praxis verwendet benutzt man oft folgende Berechnung über die Koordinaten der Vektoren:
 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Beispiel:
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -3 + 2 + 0 = -1$
falls 0, $\Rightarrow$ dann Vektoren senkrecht (orthogonal) zueinander!

12 Vektorrechnung

Definition 3.2: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liefert als Ergebnis einen Vektor $\vec{c}$, der jeweils senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet (siehe rechte Hand Regel). Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$

Beispiel:
 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$
Es findet praktische Anwendung in der Technik: Lorentzkraft, Drehmoment...

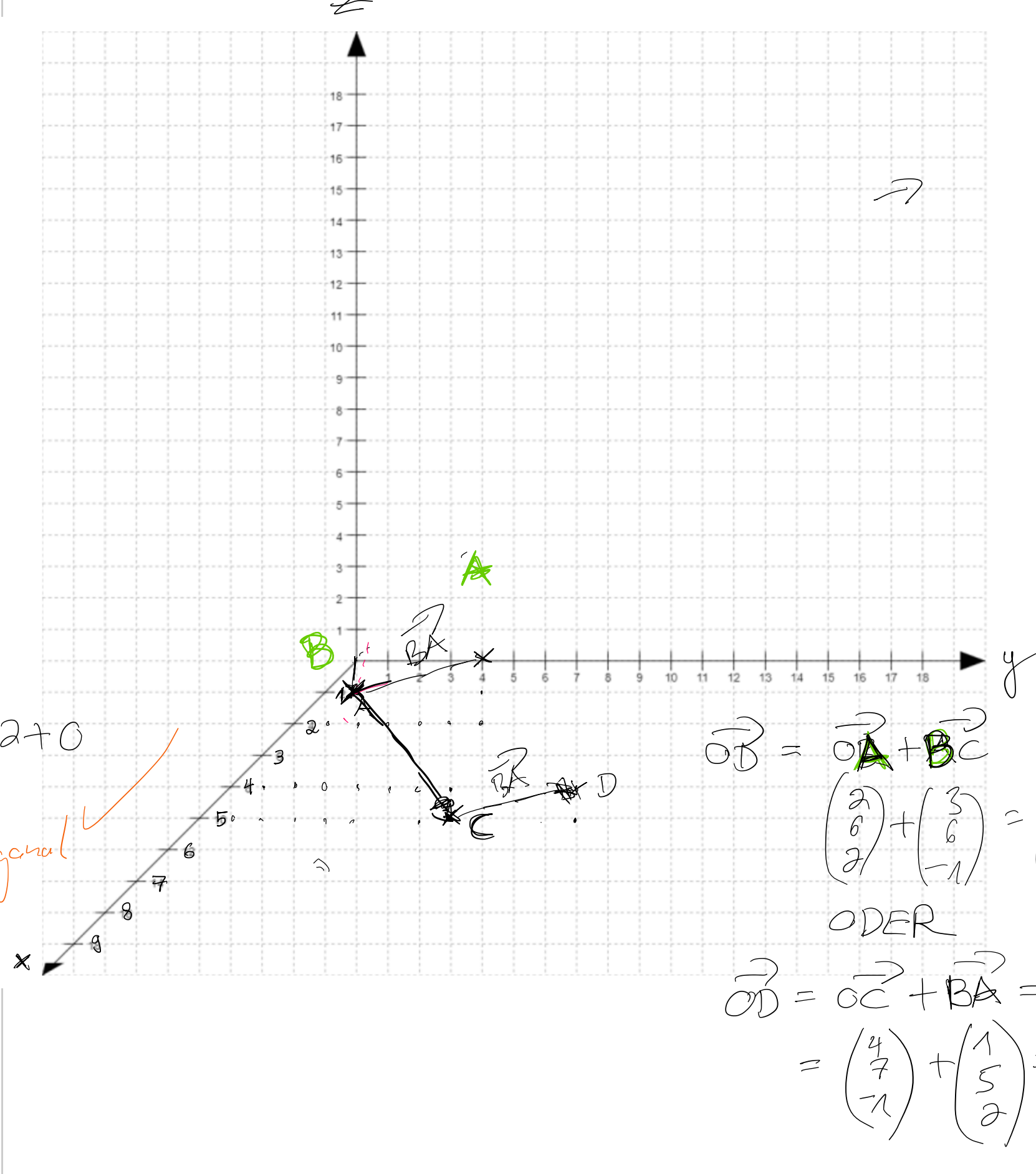
12 Vektorrechnung

12.4 Übungen

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke zwischen den Punkten $A(2|3)$ und $B(4|1)$.
Aufgabe 2: Skizzieren Sie die Punkte $A(1|1|0)$, $B(2|6|2)$ und $C(4|7|1)$ in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den fehlenden Punkt D , so dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.
Aufgabe 3: Die Punkte $A(-1|0|2)$, $B(2|4|2)$ und $C(-5|3|10)$ bilden ein Dreieck.
1. Berechnen Sie die Länge der Seiten des Dreiecks.
2. Weisen Sie nach, dass bei A ein rechter Winkel vorliegt.
3. Berechnen Sie die Größen der beiden anderen Winkel.
4. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, |\vec{AC}| = \sqrt{36 + 9 + 64} = 10$
 $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, |\vec{BC}| = \sqrt{49 + 1 + 64} = 10$
② $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = -18 + 12 + 0 = -6$
③ $\cos \beta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-6}{5 \cdot 10} = -0,12$
 $\beta = \cos^{-1}(-0,12) \approx 96,8^\circ$

oder Formel:
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$

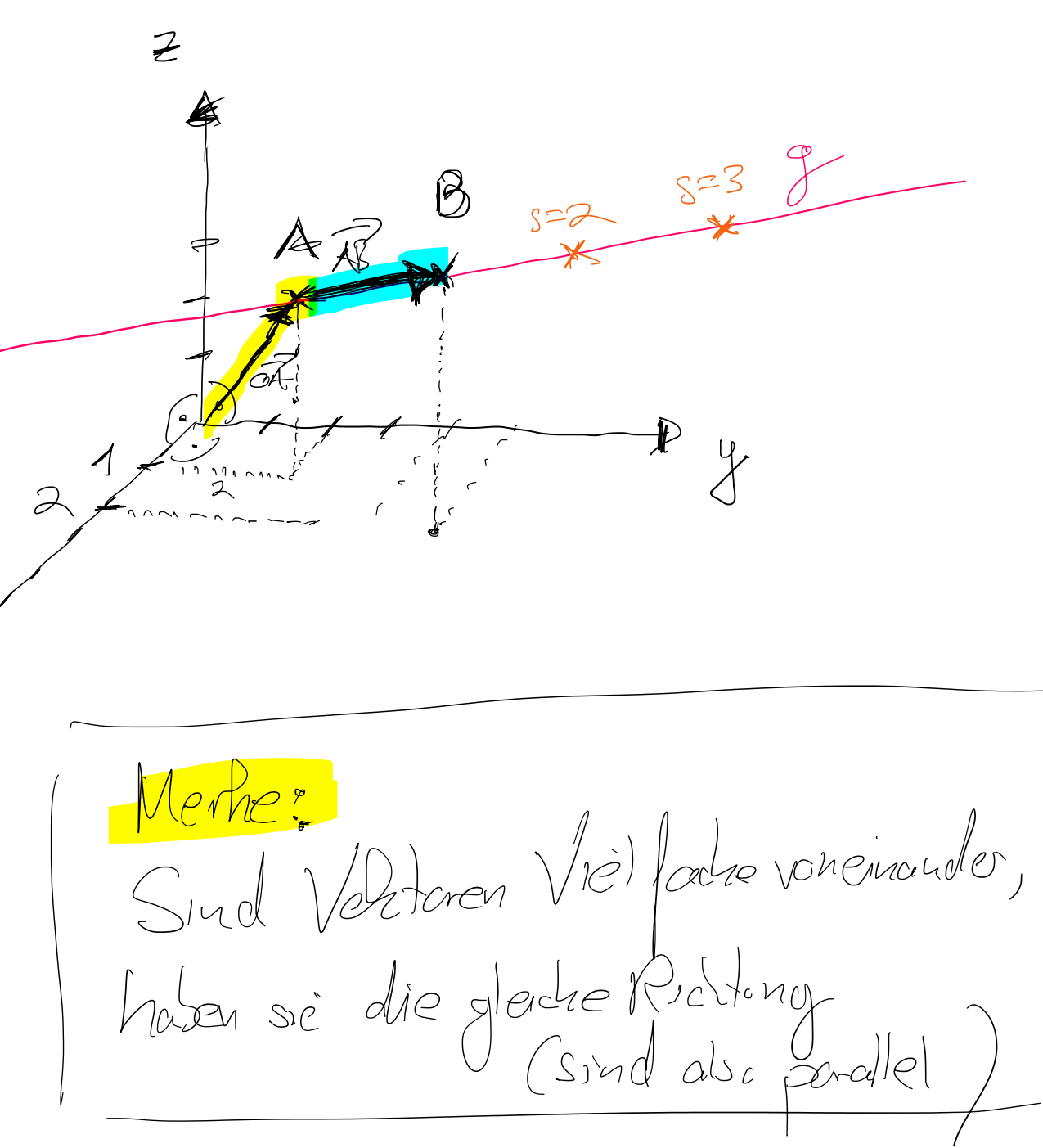


④ $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
 $= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|$
 $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{89} \approx 23,59 \text{ FE}$

12 Vektorrechnung, Analytische Geometrie

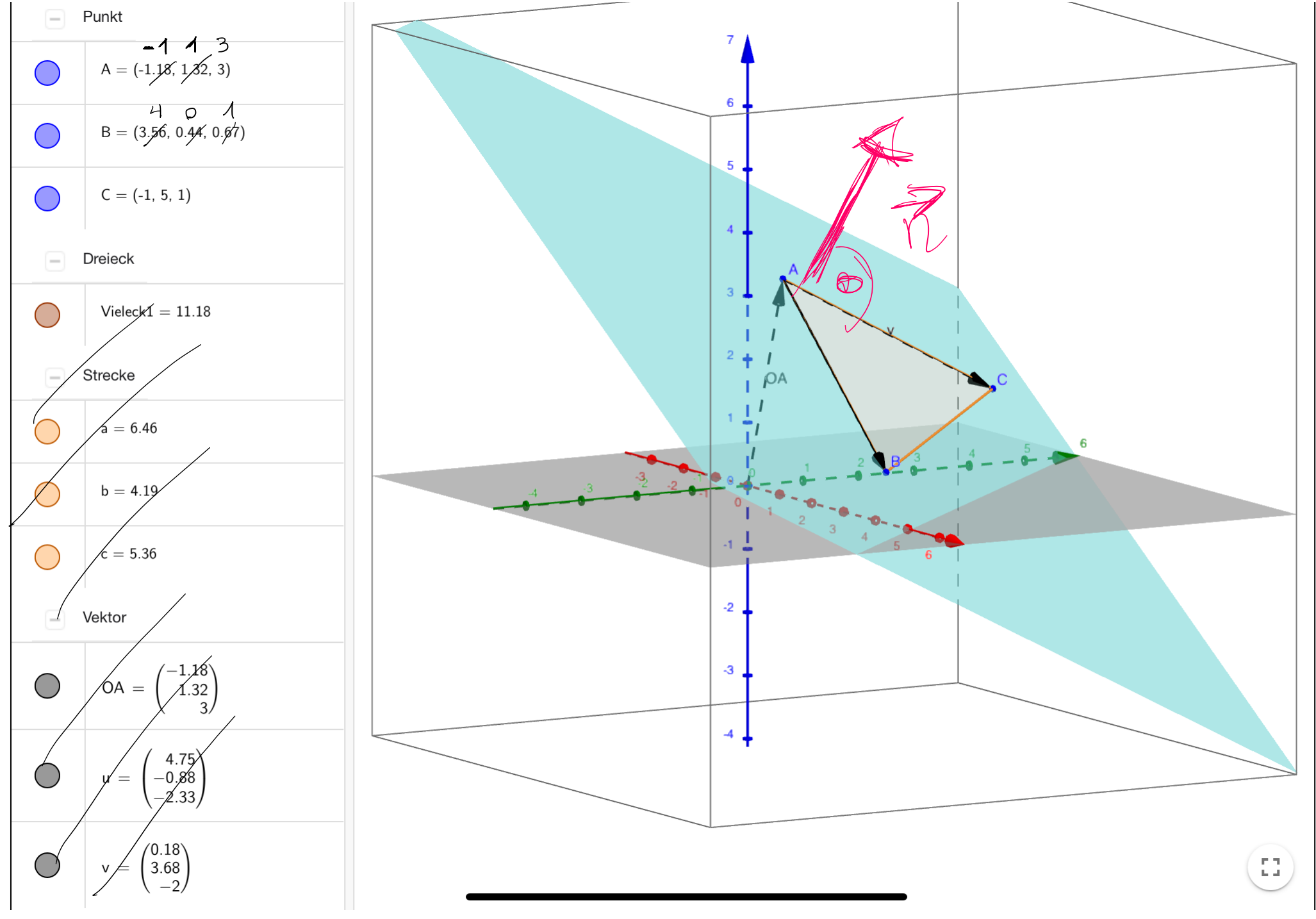
12.2.2 Geraden in zwei bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem

Beispiel 1: Gerade durch die Punkte $A(1|3|2)$ und $B(4|6|1)$.
Parameterdarstellung einer Geraden:
 $\vec{r} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB}$
 $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
Übung:
1. Stellen Sie eine Gerade h auf, die durch die Punkte $C(8|2)$ und $D(5|-4)$ verläuft.
2. Prüfen Sie, ob der Punkt $P(17|19)$ auf h liegt.
3. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und h .
 $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$
① $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow m = -3$
③ $g = h$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
LGS:
 $\begin{pmatrix} 1 + 3s = 8 - 3m \\ 2 - s = 2 - 6m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3s + 3m = 7 \\ -s + 6m = 0 \end{pmatrix} \cdot 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3s + 3m = 7 \\ -3s + 18m = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$
einsetzen in h :
 $\begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$
Schnittpunkt $P(7|0)$



Merke:
Sind Vektoren Vielfache voneinander, haben sie die gleiche Richtung (sind also parallel)

Parameterdarstellung einer Ebene:



$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Koordinatenform:
 $\hookrightarrow$ braucht sog. Normalenvektor $\Rightarrow$ steht senkrecht zur Ebene

$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$
 $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-2) - (2 \cdot 4) \\ 5 \cdot (-2) - 0 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 8 \\ -10 - 0 \\ 20 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$
Probe:
 $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = -30 + 10 + 40 = 20 \neq 0$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = 0 - 40 + 40 = 0$

Damit Koordinatenform $E: 10x + 10y + 20z = d$
Punkt einsetzen z.B. $A(1|1|3)$
 $10 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = d$
 $60 = d$
Also $E: 10x + 10y + 20z = 60$