09.03.2024

Freitag, 8. März 2024 20:39

11 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

11.1 Kartesische Darstellung

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$). Definiert man die Zahl i mit $i^2 = -1$, die sogenante imaginäre Einheit, lassen sich Gleichungen lösen, die in den rellen Zahlen keine Lösung haben. Betrachte folgende Gleichung:

$$x^2 + 4 = 0 \quad |-4$$
$$x^2 = -4 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-4} \quad \text{keine Lösung } \mathbb{R}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4i^2} = \pm 2i \quad \text{Lösungen in } \mathbb{C}$$

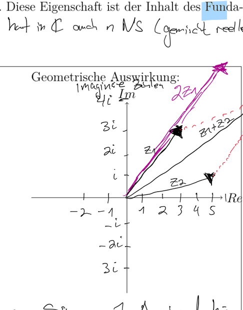
$-4 = (-1)\cdot 4 = i^2 \cdot 4 = 4i^2$

keine NS in $\mathbb{R}$

Dies bedeutet, dass jede algebraische Gleichung positiven Grades über den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt, was für reelle Zahlen nicht gilt. Diese Eigenschaft ist der Inhalt des Fundamentalsatzes der Algebra. Ein Polygnom n-ten hat in $\mathbb{C}$ auch n NS (gemischt reelle und komplexe)

konjugiert komplexe Lösungen – immer Paare

Komplexe Zahlen lassen sich graphisch darstellen als Pfeile (Zeiger) in der sog. Gauß'schen Zahlenebene:	Geometrische Auswirkung:
Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl: $z = a + b \cdot i$ (Realteil a, Imaginärteil b) (3,3)	
Bsp: $z = 3 + 3\cdot i$	
$z_1 = 3 + 3 \cdot i$	
$z_2 = 5 + 1 \cdot i$	



vgl. Verschiebung (Kräfteparallelogramm)

Addition: $z_1 + z_2 = 3 + 3i + 5 + 1i = 8 + 4i$ • Summe ≙ Aneinanderhängen der Zeiger

Skalare Multiplikation: $2 \cdot z_1 = 2\cdot(3+3i) = 6 + 6i$ • Länge des Zeigers wird verändert

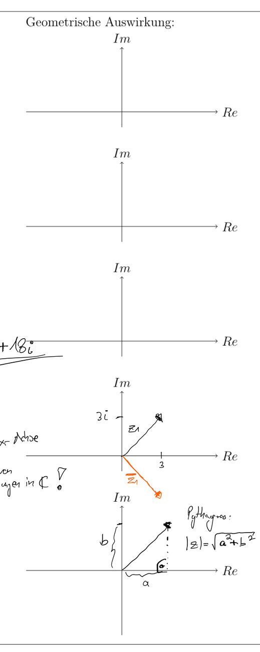
Addition: $z_1 + z_2 =$	Geometrische Auswirkung:
Multiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl): $2 \cdot z_1 =$	
Multiplikation zweier komplexer Zahlen: $z_1 \cdot z_2 = (3+3i)\cdot(5+i) = 15 + 3i + 15i + 3i^2 = 12 + 18i$	
Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z}_1 = 3 - 3i$	
Betrag (Länge) einer komplexen Zahl: $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$ (reelle Zahl)	
Es gilt: $z \cdot \bar{z} = \lvert z\rvert^2$ (braucht man bei Division!)	

$z_1 = 3+3i$

Vorzeichen des Imaginärteils wird verändert

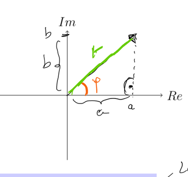
geometrisch: Spiegelung an x-Achse

konjugiert komplexes Lösungspaar bei Lösungen von quadratischen Lösungen in $\mathbb{C}$!



11.2 Trigonometrische Darstellung

Ein Zeiger lässt sich auch eindeutig über dessen Länge r und dem Winkel φ, den dieser mit der x-Achse einschließt, beschreiben. Dies sind die sogenannten Polarkoordinaten (r, φ).



$z = a + b \cdot i$ (kartesische Darstellung)

Trigonometrie:
$$\cos\varphi = \frac{\text{Ankath.}}{\text{Hypoth.}} = \frac{a}{r} \quad |\cos^{-1} \text{ bzw. } \arccos$$
$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$$

Definition 2.1: Bestimmung der Polarkoordinaten (Länge r, Winkel φ)

Pythagoras: $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & \text{für } b \geq 0 \text{ (positiver Imaginärteil, Zeiger oberhalb x-Achse)} \\ 360^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & \text{für } b < 0 \text{ (" unterhalb ")} \end{cases}$$

Mittels Polarkoordinaten lässt sich eine komplexe Zahl nun in Trigonometrischer Form darstellen:

$\cos\varphi = \frac{a}{r} \Leftrightarrow r\cdot\cos\varphi = a$
$\sin\varphi = \frac{b}{r} \Leftrightarrow r\cdot\sin\varphi = b$

$$z = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i$$

Praxis:

11.3 Darstellung in Exponentialform

Ebenfalls mittels Polarkoordinaten ergibt sich die Darstellung in Exponentialform, die z.B. bei der Bestimmung von Potenzen einer komplexen Zahl hilfreich ist.

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Die nach Leonhard Euler benannte Eulerformel (Herleitung über Taylorreihen möglich) stellt eine Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Exponentialfunktionen mittels komplexer Zahlen dar:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$
$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi)$$

Für den Winkel $\varphi = \pi$ ergibt sich aus der Euler'schen Formel die sogenannte Eulersche Identität

$$e^{i\pi} = -1$$

Eine der bekanntesten Formeln in der Welt, die einen Zusammenhang zwischen vier der bedeutendsten mathematischen Konstanten herstellt: der Euler'schen Zahl e, der Kreiszahl π, der imaginären Einheit i sowie der reellen Einheit 1. Umgeformt kommt noch die Null als weitere mathematisch bedeutende Konstante hinzu:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Beispiel: $z = 1 + i$

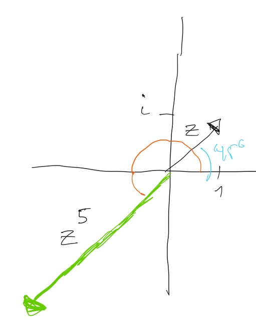
$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi_{DEG} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$

$\Rightarrow$ Exponentialform: $z = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45^\circ}$ oder Trigonometrische Darstellung $z = \sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ + \sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ \cdot i$

Damit Potenzen gut berechnen!

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45^\circ}\right)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot \left(e^{i\cdot 45^\circ}\right)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot e^{i\cdot 225^\circ}$$



$$\left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)^n = r_1^n \cdot e^{i n \cdot \varphi_1}$$

geometrisch:
- Radius wird potenziert
- Winkel multipliziert mit n

auch bei Multiplikation

$z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1} \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2)\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

geometrisch:
- Radien werden multipliziert
- Winkel addiert

13 Mengen und Ungleichungen

13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen

Aufgabe 1 $A = \{3,4,5,6,7,8\}$

Geben Sie an, welche Zahlen zu den folgenden Mengen gehören.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 8\}$

(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 < y \leq 4\}$ $= \{-1,0,1,2,3,4\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z \text{ ist Teiler von } 24\}$ $= \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{P} \mid x \leq 40\}$ (Primzahlen)

(e) $E = \{z \in \mathbb{Z} \mid \lvert z\rvert < 5\}$ $= \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ (Betrag)

Aufgabe 2

Geben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Bedingung an, welche die Elemente erfüllen müssen (vgl. Aufgabe 1). $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 8\}$

(a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(b) $B = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$

(c) $C = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(d) $D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(e) $E = \{4, 5\}$

(f) $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

vereinigt: $A \cup B = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ logisch: "ODER"

geschnitten: $A \cap B = \{3,4\}$ logisch: "UND"

"ohne": $A \setminus B = \{5,6,7,8\}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie...

$A\cup B$, $B\cap C$, $C\setminus D$, $D\setminus C$, $D\cup E$ und $E\cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe 1! (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

Aufgabe 4

Geben Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.

$A\cup B$, $B\cap C$, $C\setminus D$, $D\setminus C$, $D\cup E$ und $E\cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe 1! (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

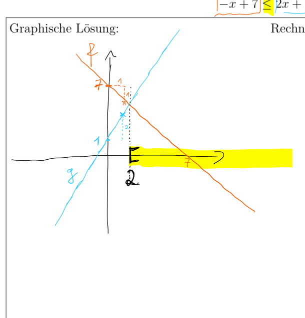
$x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 8$

$[3;8]$ abgeschlossenes Intervall

$]2;9[$ offenes Intervall (2 bzw. 9 nicht enthalten) bzw. $(2;9)$

13.2 Ungleichungen

Beispiel: $\underbrace{-x+7}_{f(x)} \leq \underbrace{2x+1}_{g(x)}$

Graphische Lösung:	Rechnung:
	$-x+7 \leq 2x+1 \quad \lvert -2x \quad \lvert -7$ $-3x \leq -6 \quad \lvert :(-3)$ $x \geq 2$ $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ bzw. $[2;\infty)$

Relationszeichen umdrehen (siehe unten)

Merke:

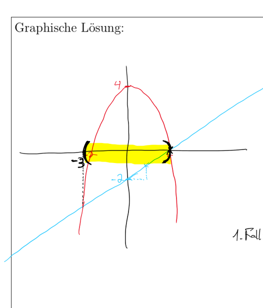
Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Relationszeichen um!!!

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung.

$$\underbrace{-x^2+4}_{f} > \underbrace{x-2}_{g}$$

Tipp: Stellen Sie die Ungleichung so um, dass eine Seite null wird. Bestimmen Sie dann die Linearfaktorzerlegung und führen damit eine Fallunterscheidung durch.

Graphische Lösung:	Rechnung:
	$-x^2+4 > x-2 \quad \lvert -x \quad \lvert +2$ $-x^2-x+6 > 0 \quad \lvert :(-1)$ $x^2+x-6 < 0$ Linearfaktoren: $(x+3)\cdot(x-2) < 0$ 1. Fall: $x+3>0$ und $x-2<0$ $x>-3$ und $x<2$ $\mathbb{L}_1 = -3<x<2$ 2. Fall: $x+3<0$ und $x-2>0$ $x<-3$ und $x>2$ $\mathbb{L}_2 = \emptyset$ leere Menge!

PQ-Formel:
$-x^2-x+6 = 0 \quad \lvert :(-1)$
$x^2+x-6 = 0 \quad \lvert PQ$
$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$
$x_1 = -3$ oder $x_2 = 2$

nach unten geöffnet

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = -3<x<2$

13.3 Betragsungleichungen

Wiederholung:

$$f(x) = \lvert x\rvert := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

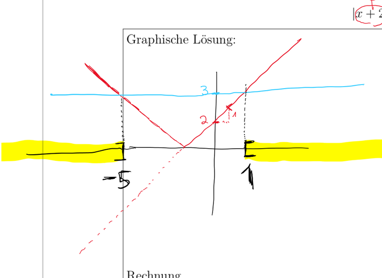
Bsp: $\lvert -4\rvert = -(-4) = 4$

Merke:

Bei der rechnerischen Lösung kann folgender Zusammenhang hilfreich sein: $\lvert x\rvert^2 = x^2$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$$\underbrace{\lvert x+2\rvert}_{f} \geq \underbrace{3}_{g}$$

Graphische Lösung:	Rechnung:
	1. Fall: $x+2 \geq 0$ $x \geq -2$ dann (Betrag weglassen) $x+2 \geq 3 \quad \lvert -2$ $x \geq 1$ Schnittmenge $\cap$: $x \geq 1$ 2. Fall: $x+2<0$ (im Betrag steht was Negatives) $x<-2$ dann $-(x+2) \geq 3$ (Betrag weg, $-(\ldots)$ setzen) $-x-2 \geq 3 \quad \lvert +2$ $-x \geq 5 \quad \lvert :(-1)$ $x \leq -5$ Schnittmenge $\cap$: $x \leq -5$
Rechnung	

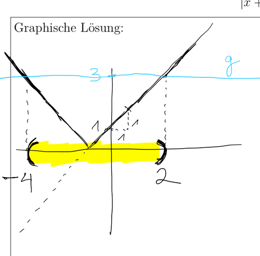
Gesamtlösung ist Vereinigungsmenge $\cup$

$\mathbb{L} = \{x \leq -5 \cup x \geq 1\}$

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$$\underbrace{\lvert x+1\rvert}_{f} < \underbrace{3}_{g}$$

Graphische Lösung:	Rechnung:
	1. Fall: $x+1 \geq 0 \quad \lvert -1$ $x \geq -1$ dann $x+1<3 \quad \lvert -1$ $x<2$ Schnittmenge: $-1 \leq x < 2$ 2. Fall: $x+1<0 \quad \lvert -1$ $x<-1$ dann $-(x+1)<3 \quad \lvert :(-1)$ $x+1 > -3 \quad \lvert -1$ $x > -4$ Schnitt: $-4<x<-1$
Rechnung	

$-4 < x < 2$

Nachtrag!

14 Regel von de L'Hospital

Merke:

Liegt bei einer Grenwertbestimmung ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ vor, darf man Zähler und Nenner getrennt Ableiten und den Grenzwert danach neu bestimmen. Ggf. kann dies mehrfach erfolgen.

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+1}{1} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{2x^2+6x} \; \frac{"\infty"}{"\infty"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+6} \; \frac{"\infty"}{"\infty"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 3} \frac{2x}{2x-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-2x-e^{-x}}{x-\sin(x)} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-2+e^{-x}}{1-\cos(x)} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^x}{\cos(x)} = \frac{2}{1}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to -2} \frac{3}{3x^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-2x}$ ($\infty \cdot 0$) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \; \frac{"\infty"}{"\infty"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} \; \frac{"\infty"}{"\infty"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞) $= \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} \underset{\text{3. Log-Gesetz}}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}} \; \frac{"0"}{"0"}$

$\underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\tan(x)}{2x}} \; \frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{\cos^2(x)}}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$