



Äbungen_K
omplex_Za...

Dr. Markus Schröder



Mathematik Vorbereitungskurs

Übungen zu Komplexe Zahlen

X

Aufgabe 1

Gegeben sind die Komplexen Zahlen $z_1 = \frac{1}{7} + 4i, z_2 = -3 - \frac{1}{6}i$ und $z_3 = -1 + 2i$.
Stellen Sie die Zahlen $w_1 = z_1 + 2z_2 - 3z_3, w_2 = \overline{z_3} \cdot z_3^2 \cdot z_3, w_3 = \frac{z_1}{z_3}$
in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$w_1 = \frac{1}{7} - 4i + 2 \cdot \left(\underbrace{-3}_{-7} - \underbrace{\frac{1}{6}i}_{\frac{1}{6}} \right) - 3 \cdot \left(\underbrace{-1}_{-3} + \underbrace{2i}_{2} \right)$
$$= \frac{1}{7} - 4i - \frac{6}{3} - \frac{1}{3}i + \frac{3}{3} - 6i$$
$$= \frac{1}{7} - 3 - 10i - \frac{1}{3}i$$
$$= \frac{1}{7} - \frac{21}{7} - \frac{20i}{3} - \frac{1}{3}i = -\frac{20}{7} - \frac{21i}{3}$$

$w_2 = \overline{z_3} \cdot z_3^2 \cdot z_3$
$$= \overline{z_3} \cdot z_3 \cdot \overline{z_3}^2$$
$$= |z_3|^2 \cdot \left(\underbrace{a}_{-1} - \underbrace{b}_{2}i \right)^2$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2}^2 \cdot \left((-1)^2 - 2(-1) \cdot 2i + (2i)^2 \right)$$
$$= 5 \cdot \left(1 + 4i + 4i^2 \right)$$
$$= 5 \cdot (-3 + 4i)$$
$$= -15 + 20i$$

2. Bin. Formel:
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

X

Aufgabe 2

Es sei $z = 3 + 0.5i$. Veranschaulichen Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Zahlen:
 $z_1 = i \cdot (3 + 0.5i)$
 $= 3i + 0.5i^2 = -0.5 + 3i$
 $z_1 = iz, z_2 = -z, z_3 = z^2 i - 8(i-1)$
 $z_2 = -(3 + 0.5i) = -3 - 0.5i$
 $= (3 + 0.5i)^2 \cdot i - 8i + 8$
 $= (9 + 3i + 4i^2) \cdot i - 8i + 8$
 $= (5 + 3i) \cdot i - 8i + 8$
 $= \frac{35}{4} + 3i \cdot i - 8i + 8$
 $= \frac{35}{4}i + 3i^2 - 8i + 8$
 $= 5 + \frac{3}{4}i$

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Trigonometrischer und Exponentialform dar:

$z_1 = -\frac{1}{3}(1-i), z_2 = -10, z_3 = (1+i)^9$

Aufgabe 4

Berechnen Sie:

a) $(1 - \sqrt{2}i)^5$

$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$
 $\varphi = 360^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 305,26^\circ$
 $\left(\sqrt{3} \cdot e^{i \cdot 305,26^\circ}\right)^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot e^{i \cdot 1526,32^\circ} = \left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot e^{i \cdot 86,32^\circ}$
 $= \left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot e^{i \cdot 86,32^\circ}$

b) $\frac{2+6i}{3-5i} = \frac{(2+6i) \cdot (3+5i)}{(3-5i) \cdot (3+5i)} = \frac{-12 + 14i}{17}$

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

$z^2 - 4z + 7 = 0 \quad |p,q$

$z_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 7}}{2}$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{4-7}}{2}$$
$$= 2 \pm \sqrt{-3}$$
$$= 2 \pm \sqrt{3}i$$
$$= 2 \pm \sqrt{3} \cdot i$$

(3) $z_1 = -\frac{1}{3}(1-i) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}e^{i \cdot 135^\circ}$
 $z_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \cos(135^\circ) + \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \sin(135^\circ) \cdot i$

$z_2 = -10$

$z_1 = 10e^{i \cdot 180^\circ}$
 $z_1 = 10 \cdot \cos(180^\circ) + 10 \sin(180^\circ) \cdot i$

$z_3 = (1+i)^9$

$z_3 = (\sqrt{2}e^{i \cdot 45^\circ})^9 = (\sqrt{2})^9 \cdot e^{i \cdot 405^\circ}$
 $= (\sqrt{2})^9 \cdot e^{i \cdot 405^\circ - 360^\circ}$
 $= (5)^9 \cdot e^{i \cdot 45^\circ}$