



Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

**Mathematik Vorbereitungskurs**  
**Übungen Differentialrechnung**

**Aufgabe 1**

Nachfolgend ist der Graph einer Funktion  $f$  gegeben. Ergänzen Sie diesen um eine Skizze seiner ersten ( $f'$ ) und seiner zweiten Ableitung ( $f''$ ).

Handwritten notes:  $f' = \text{abwärtsgewandt}$ ,  $f'' = \text{aufwärtsgewandt}$ ,  $f'' = 0$  at inflection points,  $f' = 0$  at local extrema.

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

**Mathematik Vorbereitungskurs**  
**Übungen Differentialrechnung**

**Aufgabe 2** Skizzieren Sie  $f'(x)$

Handwritten notes:  $f = \text{abwärtsgewandt}$ ,  $f' = \text{aufwärtsgewandt}$ .

Quelle: <http://www.mathb.uni-leipzig.de/lehre/2019/2020/2021/2022/2023/2024/2025/2026/2027/2028/2029/2030/Funktionen/geradische/20Abbiten/Block1/Aufg2/Aufg.htm>  
<https://de.serlo.org/mathe/26407/aufgaben-zum-uebungs-differenzieren>

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

**Mathematik Vorbereitungskurs**  
**Übungen Differentialrechnung**

**Aufgabe 3**

Bestimmen Sie die Lage und Art der Extremstellen der folgenden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ . Bestimmen Sie weiterhin ihre Wendestellen (hierbei nur notwendige Bedingungen).

$f_1(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$

Zusatz:  
Folgende Aufgaben sind jeweils auszuführen:  
(i) Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Linearfaktorzerlegung an.  
(ii) Ermitteln Sie die Schnittstelle mit der y-Achse.  
(iii) Untersuchen Sie die Funktion auf das Randverhalten.  
(iv) Skizzieren Sie den Graph der Funktion in ein Koordinatensystem.

**Aufgabe 4**

Nach Einnahme eines Medikaments kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(t) = 10t \cdot e^{-0.3t}$  die im Blut vorhandene Menge des Medikaments in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

(i) Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist.  
(ii) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.

Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear.  
(iii) Die lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente  $k$  am Graphen von  $f$  im Punkt  $P(6, f(6))$  beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist.

Ableitungen:  
 $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2$   
 $f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 16x$   
 $f''(x) = 12x^2 + 36x + 16$

Extrema:  
 ① N.N. Bed.:  $f'(x) = 0$   
 $x^2(4x^2 + 18x + 16) = 0$   
 $x^2 = 0$  oder  $4x^2 + 18x + 16 = 0$   
 $x = 0$  oder  $x = -1 \pm \sqrt{1.75}$   
 $x_1 = -1$  oder  $x_2 = -2$

② H.N. Bed.:  
 $f''(x) = 0 \Rightarrow$  keine Aussage möglich  
 $\Rightarrow$  ist aber Scheitelpunkt siehe ①  
 oder Bestimmung der Werteplatte  
 $f'(-4) = 4(-4)^3 + 18(-4)^2 + 16(-4) = -32 < 0 \Rightarrow \text{MAX}$   
 $f'(-2) = 4(-2)^3 + 18(-2)^2 + 16(-2) = 8 > 0 \Rightarrow \text{MIN}$

③  $y = 10$ :  
 $f(x) = 0 \Rightarrow \text{SP}(0|0)$   
 $f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{3}{2}(-4)^2 + \frac{5}{3}(-4)^3 = 8.55 \Rightarrow \text{MAX}(-4|8.55)$   
 $f(-2) = -3.75 \Rightarrow \text{MIN}(-2|-3.75)$

Wendestellen:  
 ① N.N. B.:  $f''(x) = 0$   
 $4x^3 + 18x^2 + 16x = 0$   
 $x(4x^2 + 18x + 16) = 0$   
 $x = 0$  oder  $4x^2 + 18x + 16 = 0$   
 $x_1 = -1 \pm \sqrt{1.75}$   
 $x_1 = -3.28$  oder  $x_2 = -1.22$

② H.N. B.:  
 $f'''(x) = 12x^2 + 36x + 16 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$   
 $f'''(-3.28) \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$   
 $f'''(-1.22) \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$

WolframAlpha

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

1/5x^5+3/2x^4+8/3x^3

Input:  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3$

Plots:  $(x \text{ from } -5.1 \text{ to } 1.7)$

Alternate forms:  $\frac{1}{30}x^3(6x^2 + 45x + 80)$

Derivative:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 \right) = x^4 + 6x^2 + 8$

Local maximum:  $\max \left( \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3} \right) = 8.5333$  at  $x = -4$

Local minimum:  $\min \left( \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3} \right) = -3.7333$  at  $x = -2$

WolframAlpha

Roots:  $x = 0$

Polynomial discriminant:  $\Delta = 0$

Domain:  $\mathbb{R}$  (all real numbers)

Range:  $\mathbb{R}$  (all real numbers)

Derivative:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 \right) = x^4 + 6x^2 + 8$

Indefinite integral:  $\int \left( \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{30}x^6 + 9x^5 + 20x^4 + \text{constant}$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

**Mathematik Vorbereitungskurs**  
**Übungen Differentialrechnung**

**Aufgabe 5**

Ein Designer (Gestalter) beschließt, seine (zylindrische) Hautcreme-Dose in einer Kugel zu verpacken. Diese soll den Radius  $R = 5$  cm besitzen. Wie groß ist dann das maximale Volumen  $V$  des in der Kugel unterzubringenden Zylinders, überlegt er. Aus dem Mathematik-Unterricht von Herrn Froebel weiß er noch

$V_{\text{Zylinder}} = r^2 \cdot h$

und nach einigem Nachdenken erkennt er (Begründung??)

$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 25 = r^2 + \frac{h^2}{4}$

Helfen Sie ihm weiter. Bestimmen Sie den Radius  $r$  und die Höhe  $h$  des optimalen Zylinders. Wie groß ist sein Volumen  $V$ ? Passt eine Creme mit 300 ml hinein?

**Aufgabe 6**

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, dessen Graph durch die Punkte  $A(1|-32)$ ,  $B(-2|4)$ ,  $C(-3|0)$  und  $D(0|0)$  verläuft.

b) Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: Sie hat im Punkt  $(0, 0)$  eine Extremstelle, in  $x = 3$  eine Nullstelle und in  $x = 1$  die Steigung  $-3$ . Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung!

c) Bestimmen Sie den Term einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades, welche durch den Punkt  $P(0|1)$  verläuft und an der Stelle  $x = 1$  eine Nullstelle und ein Minimum besitzt.