22.08.2024

Mittwoch, 21. Februar 2024 21:21

8 Steckbriefaufgaben und Lineare Gleichungssysteme

8.1 Synthese aus gegebenen Punkten

Gesucht ist eine Gerade, die durch die Punkte $A(1\,|\,3)$ und $B(-3\,|\,-5)$ verläuft:
gesucht: $f(x) = m \cdot x + b$
gegeben:

Gesucht ist eine Parabel, die durch die Punkte $A(1\,|\,6)$, $B(2\,|\,11)$ und $C(-2\,|\,3)$ verläuft:
gesucht: $f(x) =$
Merke: … Parameter sind gesucht, dann benötigt man auch … Bedingungen/Informationen
gegeben:

Übung:
Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, die durch die Punkte $A(1\,|\,-32)$, $B(-2\,|\,4)$, $C(-3\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0)$ verläuft:
gesucht: $f(x) =$

8.2 Lineare Gleichungssysteme

8.2.1 Gauß-Verfahren

$$\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -2,5 \end{pmatrix}$$

Ziel: x und y bestimmen, so dass beide Gleichungen erfüllt sind!

Man darf:

- Gleichungen mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren/dividieren
- Gleichungen miteinander addieren (subtrahieren)
- Zeilen vertauschen (Gleichungen)

Abbildung 8.1: Carl Friedrich Gauß[6], 1777-1855

$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -2,5 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung (Kopfrechnung):

$$\begin{pmatrix} -6x + 12y = 12 \\ 6x + 2y = -5 \end{pmatrix}$$

hier soll eine Null entstehen

$3\cdot\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II} \Rightarrow$ umformen $\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 0 & & 14y & = & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 14y = 7 \quad |:14$, $y = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

in I einsetzen: $-2x + 4\cdot\frac{1}{2} = 4$, $-2x + 2 = 4$, $-2x = 2$, $x = -1$

Lösung aufgeschrieben als ein sogenannter Vektor (Lösungsvektor):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Übungen:

a)
$$\begin{pmatrix} -3x & + & y & = & -1 \\ 4x & - & y & = & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{matrix}\begin{pmatrix} x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ -4x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{pmatrix}$$

① I+II geeignet addieren, I+III

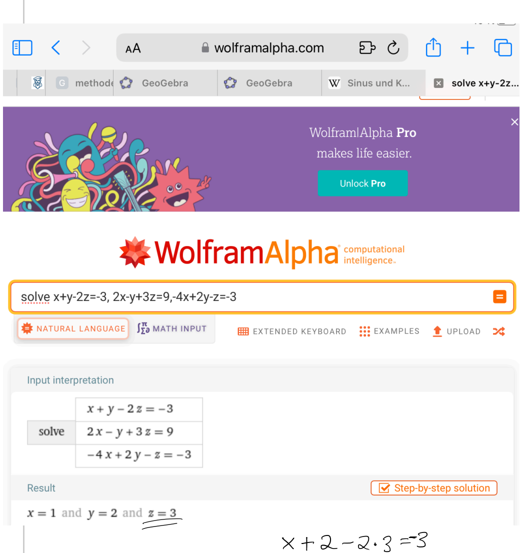
$-2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II} \Rightarrow$, $4\cdot\mathrm{I}+\mathrm{III} \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} x + y - 2z = 3 \\ 0 \;\; -3y + 7z = 15 \\ 0 \;\; +6y - 9z = -15 \end{pmatrix}$$

② II+III geeignet addieren

$2\cdot\mathrm{II}+\mathrm{III} \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} x + y - 2z = 3 \\ 0 \;\; -3y + 7z = 15 \\ 0 \;\; 0 \;\; 5z = 15 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 3$$

in II: $-3y + 7\cdot 3 = 15$, $-3y + 21 = 15 \quad |-21$, $-3y = -6$, $y = 2$

in I: $x + 2 - 2\cdot 3 = 3$, $x + 2 - 6 = 3$, $x - 4 = 3 \quad |+4$, $x = 1$



Übung:

a)
$$\begin{pmatrix} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \end{pmatrix}$$

$-2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II} \Rightarrow$, $-3\cdot\mathrm{I}+\mathrm{III} \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -2 \\ 0 \;\; +y \;\; +5z = 11 \\ 0 \;\; -5y \;\; +8z = 11 \end{pmatrix}$$

$5\cdot\mathrm{II}+\mathrm{III} \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -2 \\ 0 \;\; y \;\; +5z = 11 \\ 0 \;\; 0 \;\; 33z = 66 \end{pmatrix} \quad |:33$$

$\Rightarrow z = 2$

in II: $y + 10 = 11$, $y = 1$; in I: $x + 1 - 4 = -2$, $x = 1$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -6x & + & 9y & = & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y = 1 \\ 0 \;\; 0 = 5 \end{pmatrix}$$ ↯ Widerspruch

$\Rightarrow$ LGS ist nicht lösbar!

Merke:

Bei LGS, die gleich viele Zeilen wie Variablen haben, kann man nach Durchführung des Gauß-Verfahrens (Herstellung der Stufenform) die Lösungsart in der letzten Zeile ablesen, es gibt 3 Fälle:

- eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \;\; 0 \;\; 4z = 8 \end{pmatrix}$
- keine Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 = 5 \end{pmatrix}$ ↯
- unendlich viele Lösungen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 = 0 \end{pmatrix}$ Nullzeile

Beispiel zu Fall 3:

$$\begin{pmatrix} 7x & - & 14y & + & 7z & = & 21 \\ x & - & 10y & + & 5z & = & 15 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & -6 \end{pmatrix} \cdot(-7)$$

$$\begin{pmatrix} 7x - 14y + 7z = 21 \\ 0 \;\; 56y - 28z = -84 \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 56y - 28z = -84$$

$-28z = -84 - 56y \quad |:(-28)$

$z = 3 + 2y$

y ist frei wählbar! $y = k$

in I: $7x - 14y + 7\cdot(3+2y) = 21$, $7x - \cancel{14y} + \cancel{21} + \cancel{14y} = \cancel{21}$, $7x = 0$, $x = 0$

z.B. $y=1$: $z = 3+2\cdot 1 = 5$, $x = 0$
$y=2$: $z = 3+2\cdot 2 = 7$, $x = 0$

Die unendlich vielen Lösungen in Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k=1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Übung:
Das folgende LGS hat unendlich viele Lösungen, berechnen Sie diese und schreiben Sie diese in Vektorschreibweise auf.

$$\begin{pmatrix} 2x & + & 4y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 7z & = & -3 \\ 4x & + & 8y & - & 2z & = & 6 \end{pmatrix}$$

8.2.2 Überbestimmte LGS

Führen Sie, wie gewohnt, das Gauß-Verfahren durch und geben Sie danach die Lösung des LGS an:

a)
$$\begin{pmatrix} 2x & - & 6y & = & 3 \\ x & - & 8y & = & -1 \\ 4x & - & 20y & = & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & = & 7 \end{pmatrix}$$

9 Summen und Reihen

9.1 Gauß'sche Summenformel

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+\ldots+10$$

Endwert; Startwert; Laufvariable $\Rightarrow$ wird immer um 1 erhöht (Index)

Wie lautet die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen?

$$\sum_{i=1}^{100} i = ?$$

1+2+3+4+5+...+49+50+51+...+95+96+97+98+99+100

101, 101, 101, $= 50 \cdot 101 = 5050$

Allgemein für die Summe der natürlichen Zahlen bis n ergibt sich die Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Wie kann man die Allgemeingültigkeit dieser Formel beweisen?

Abbildung 9.1: Carl Friedrich Gauß [6], 1777-1855

9.1.1 Vollständige Induktion

Beweise von Aussagen über natürliche Zahlen erfolgen oft mittels des Beweisverfahrens namens Vollständige Induktion.

Beweise: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang:
Bestätige die Vermutung für das kleinste n:

Für $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

2. Induktionsschritt von n nach $n+1$:
Man nimmt an (und darf dabei verwenden), dass die Aussage für n gilt und versucht, durch Umformungen die Aussage für $n+1$ herzuleiten:

Zu zeigen ist, dass die Formel auch für n+1 gültig ist, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Starte mit $\sum_{i=1}^{n+1} i \underset{\text{Trick}}{=} \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$

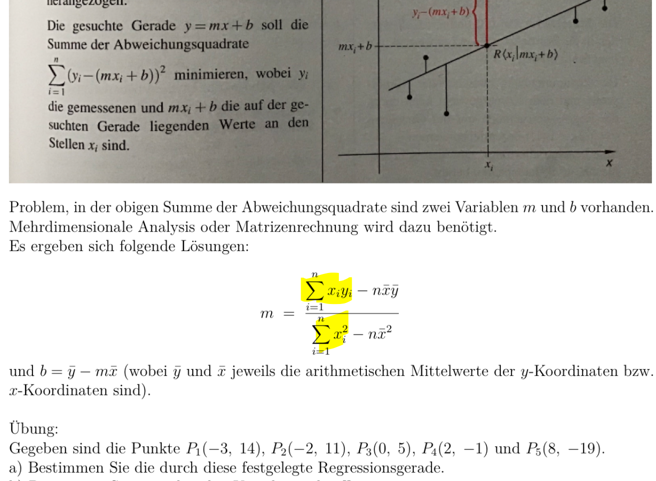
nach Induktionsvoraussetzung $= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{(n+1)\cdot 2}{2} = \frac{n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot 2}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

9.2 Lineare Regression

1. Ist der Zusammenhang zwischen x und y aus der Theorie bekannt, setzt man entsprechend an.

2. Man orientiert sich an der Punktwolke und sucht einen sinnvollen Funktionstyp als Ansatz.

Abbildung 9.2: Messpunkte



Wie kann die „optimale" Gerade gefunden werden?

Die Gerade beschreibt den Zusammenhang dann optimal, wenn die gegebenen Punkte möglichst wenig von ihr abweichen. Ähnlich wie bei der Standardabweichung (► S. 170) wird auch hier die Summe der Quadrate der Abweichungen als Maßstab herangezogen:

Die gesuchte Gerade $y = mx + b$ soll die Summe der Abweichungsquadrate $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$ minimieren, wobei y_i die gemessenen und $mx_i + b$ die auf der gesuchten Gerade liegenden Werte an den Stellen x_i sind.

Problem, in der obigen Summe der Abweichungsquadrate sind zwei Variablen m und b vorhanden. Mehrdimensionale Analysis oder Matrizenrechnung wird dazu benötigt.
Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

und $b = \bar{y} - m\bar{x}$ (wobei $\bar{y}$ und $\bar{x}$ jeweils die arithmetischen Mittelwerte der y-Koordinaten bzw. x-Koordinaten sind).

Übung:
Gegeben sind die Punkte $P_1(-3,\ 14)$, $P_2(-2,\ 11)$, $P_3(0,\ 5)$, $P_4(2,\ -1)$ und $P_5(8,\ -19)$.
a) Bestimmen Sie die durch diese festgelegte Regressionsgerade.
b) Bestimmen Sie weiterhin den Korrelationskoeffizient.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y},$$

wobei

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}}$$

die Standardabweichung der x-Werte und s_y entsprechend für die y-Werte definiert ist. Liegt r betraglich nahe bei 1, so ist die Näherung gut, sonst schlecht. Was ist hier der Fall?

9.3 Wichtige Reihen

Summe bis ins Unendliche

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$3\cdot 2\cdot 1$

Fakultät $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Taylorreihen

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \quad (9.1)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots \quad (9.2)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots \quad (9.3)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \quad (9.4)$$