Blatt 4 - Aufgabe 4-6

Donnerstag, 22. August 2024 15:39

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lage und Art der **Extremstellen** *der folgenden Funktionen f_1 und f_2. Bestimmen Sie weiterhin ihre* **Wendestellen** *(hierbei nur notwendige Bedingung).*

$$f_1(x) = x^4 - 8x^2 - 9\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3\,,$$

Zusatz:

*Folgende Aufgaben sind **jeweils** auszuführen:*

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Linearfaktorzerlegung an.

(ii) Ermitteln Sie die Schnittstelle mit der y-Achse.

(iii) Untersuchen Sie die Funktion auf das Randverhalten.

(iv) Skizzieren Sie den Graph der Funktion in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 4

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung

↓ Definitionsbereich

$$f(t) = 10t \cdot e^{-0.5t} \quad , \quad 0 \le t \le 6$$

die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t.

(i) Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. ⇒ MAX

17:20 Uhr

(ii) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.
nur der t-Wert (x-Ko)

Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear

(iii) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt P(6, f(6)) beschrieben. in P aufstellen
Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist.

i) Bestimmung des Maximums:

Ableitungen: $f(t) = \underbrace{10t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{v}$

$f'(t) = \underbrace{10}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{v} + \underbrace{10t}_{u} \cdot \underbrace{(-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t}}_{v'}$

$f'(t) = \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{u} \cdot \underbrace{(10 - 5t)}_{v}$

$f''(t) = \underbrace{-0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}}_{u'} \cdot \underbrace{(10-5t)}_{v} + \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{u} \cdot \underbrace{(-5)}_{v'}$

$= e^{-0{,}5t} \cdot (-0{,}5 \cdot (10-5t) - 5) = e^{-0{,}5t} (2{,}5t - 10)$
$(-5 + 2{,}5t - 5)$

① Notwendige Bedingung:

$f'(t) = 0$

$e^{-0{,}5t} \cdot (10 - 5t) = 0$

$e^{-0{,}5t} = 0$ oder $10 - 5t = 0$
R.L. $\quad -5t = -10$
$\underline{\underline{t = 2}}$

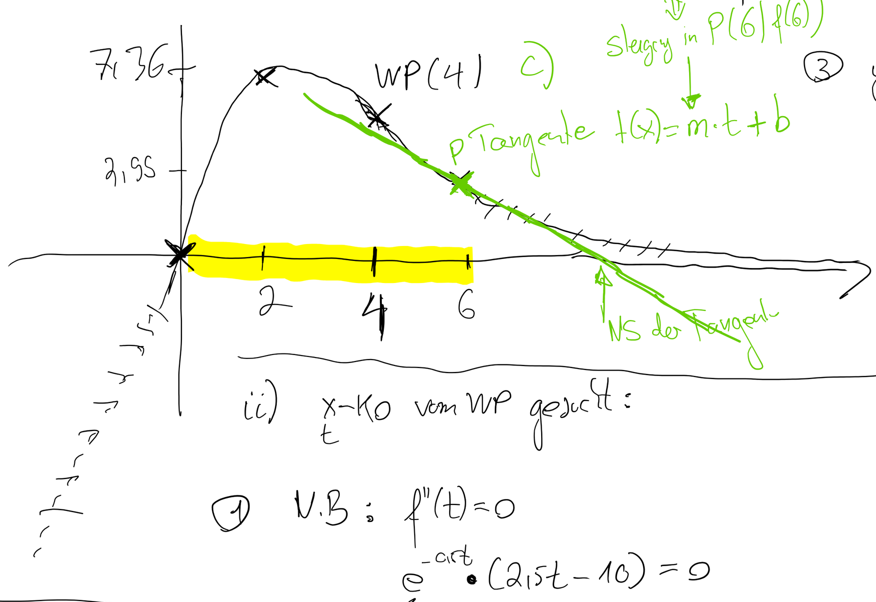
② Hinreichende Bedingung:

$f''(2) = e^{-0{,}5 \cdot 2} \cdot (2{,}5 \cdot 2 - 10)$
$= e^{-1} \cdot (-5) < 0 \Rightarrow$ MAX
$+ \cdot -$

③ y-Ko: $f(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 2} = 20 \cdot e^{-1} = \frac{20}{e} \approx 7{,}36$

Also MAX (2 | 7,36), nach 2h beträgt die max. Konzentration 7,36 $\frac{mg}{l}$

(Es liegt kein Randextremum vor, da die y-Ko an den Definitionsrändern kleiner sind, als die vom MAX: $f(0) = 0 < 7{,}36$
$f(6) \approx 2{,}99 < 7{,}36$)



ii) x-Ko vom WP gesucht:
t

① N.B.: $f''(t) = 0$

$e^{-0{,}5t} \cdot (2{,}5t - 10) = 0$

$e^{-0{,}5t} = 0$ oder $2{,}5t - 10 = 0$
R.L. $\quad \underline{\underline{t = 4}}$

iii) $P(6 \mid \underbrace{60 \cdot e^{-3}}_{f(6)})$

$m = f'(6) = e^{-3} \cdot (10 - 30)$
$= e^{-3} \cdot (-20) = -20e^{-3}$

Damit $t(t) = -20e^{-3} \cdot t + \underset{?}{b} \quad | \; P(6 | 60e^{-3})$ einsetzen

$60e^{-3} = -20e^{-3} \cdot 6 + b$
$60e^{-3} = -120e^{-3} + b \quad | +120e^{-3}$
$180e^{-3} = b$

Also $t(x) = -20e^{-3} \cdot t + 180e^{-3} \overset{!}{=} 0$
$-20e^{-3} t = -180e^{-3} \quad | : -20e^{-3}$
$t = \frac{-180e^{-3}}{-20e^{-3}} = \underline{\underline{9}}$

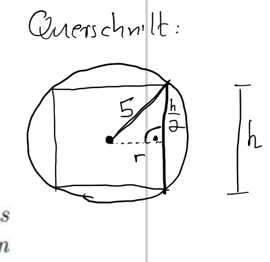
Also nach 9h !

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Skizze: Querschnitt:



Aufgabe 5 Extremwertaufgaben (Optimierungsaufgabe !)

Ein Designer (Gestalter!) beschließt, seine (zylindrische) Hautcreme-Dose in einer Kugel zu verpacken. Diese soll den Radius R = 5 cm besitzen. Wie groß ist dann das maximale Volumen $\mathcal{V}$ des in der Kugel unterzubringenden Zylinders, überlegt er. Aus dem Mathematik-Unterricht von Herrn Fredebeul weiß er noch

$$\mathcal{V}_{Zylinder} = r^2 \pi h\,,$$

⇔ Hauptbedingung: $V(r,h) = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow$ maximal ! Problem: Zwei Variablen im Funktionsterm, daher

und nach einigem Nachdenken erkennt er (Begründung??)

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = r^2 + \frac{h^2}{4}\,.$$

Nebenbedingung: ⇒ umformen nach einer Variablen und in die Hauptbedingung einsetzen !

$\Leftrightarrow 25 - \frac{h^2}{4} = r^2$

Helfen Sie ihm weiter. Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h des optimalen Zylinders. Wie groß ist sein Volumen $\mathcal{V}$? Passt eine Creme mit 300 ml hinein?

⇒ Zielfunktion: $V(h) = \left(25 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot \pi \cdot h = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{4} + 25h\right)$

$V'(h) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4}h^2 + 25\right)$

$V''(h) = \pi \cdot \left(-\frac{6}{4}h\right)$

Maximum bestimmen

① $V'(h) = 0$

$\pi \cdot \left(-\frac{3}{4}h^2 + 25\right) = 0 \quad | : \pi$
$-\frac{3}{4}h^2 + 25 = 0$
$-\frac{3}{4}h^2 = -25 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$
$h^2 = \frac{100}{3} \quad | \sqrt{\ }$
$h = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{100}{3}} \approx \underset{(-)}{+}\underline{5{,}77}$ cm

② $V''(5{,}77) = \pi \cdot \left(-\frac{6}{4} \cdot 5{,}77\right) < 0 \Rightarrow$ MAX
$+ \cdot -$

③ $V(5{,}77) = \pi \cdot \left(-\frac{5{,}77^3}{4} + 25 \cdot 5{,}77\right) \approx 302{,}3\ cm^3 > 300\ cm^3$
passt ✓

Radius: (in Nebenbedingung einsetzen)

$r^2 = 25 - \frac{(5{,}77)^2}{4}$

$r = \underset{(-)}{+}\sqrt{25 - \frac{(5{,}77)^2}{4}} \approx \underline{\underline{4{,}08\ cm}}$

Aufgabe 6 Steckbriefaufgaben

a)

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, dessen Graph durch die Punkte A(1 | −32), B(−2 | 4), C(−3 | 0) und D(0 | 0) verläuft.

b)

Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: Sie hat im Punkt (0, 0) eine Extremstelle, in x = 3 eine Nullstelle und in x = 1 die Steigung −3.
Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung!

c) Bestimmen Sie den Term einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades, welche durch den Punkt P(0 |1) verläuft und an der Stelle x= 1 eine Nullstelle und ein Minimum besitzt.

a) gesucht: $f(x) = \underset{?}{a} \cdot x^3 + \underset{?}{b}x^2 + \underset{?}{c} \cdot x + \underset{?}{d}$

Gleichungen

LGS

gegeben: Bedingungen

$A(1|-32) \Leftrightarrow f(1) = -32 \Leftrightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -32$
$B(-2|4) \Leftrightarrow f(-2) = 4 \Leftrightarrow a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 4$
$C(-3|0) \Leftrightarrow f(-3) = 0 \Leftrightarrow a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d = 0$
$D(0|0) \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow \cancel{a \cdot 0^3} + \cancel{b \cdot 0^2} + \cancel{c \cdot 0} + \boxed{d = 0}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + b + c = -32 \\ -8a + 4b - 2c = 4 \\ -27a + 9b - 3c = 0 \end{pmatrix}$

Bedingungen:

b) $f(3) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0 \Leftrightarrow 27a + 9b + \cancel{3c} + \cancel{d} = 0$
$f'(1) = -3 \Leftrightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -3 \Leftrightarrow 3a + 2b + \cancel{c} = -3$
$f(0) = 0 \Leftrightarrow \cancel{a \cdot 0^3} + \cancel{b \cdot 0^2} + \cancel{c \cdot 0} + \boxed{d = 0}$
$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \cancel{3a \cdot 0^2} + \cancel{2b \cdot 0} + \boxed{c = 0}$

$\begin{pmatrix} 27a + 9b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \end{pmatrix}$

c) gesucht: $f(x) = \underset{?}{a}x^4 + \underset{?}{c}x^2 + \underset{?}{e}$ $\qquad f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \cancel{a \cdot 0^4} + \cancel{c \cdot 0^2} + \boxed{e = 1}$
$f(1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + 1 = 0$
$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4a \cdot 1^3 + 2c \cdot 1 = 0$
Steigung

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + c = -1 \\ 4a + 2c = 0 \end{pmatrix}$

Die folgende Tabelle gibt einige weitere „Übersetzungshilfen" für Steckbriefaufgaben.

Text	Übersetzung in Gleichung(en)
… verläuft durch den Punkt $P\langle 1 \vert 3\rangle$	$f(1) = 3$
… verläuft durch den Ursprung	$f(0) = 0$
… hat eine Nullstelle bei $x = 3$	$f(3) = 0$
… schneidet die y-Achse bei 2	$f(0) = 2$
… schneidet die Gerade mit $y = 2x + 7$ auf der y-Achse	$f(0) = 7$
… hat eine lokale Maximalstelle (einen Hochpunkt) an der Stelle $x = -2$ bzw. … hat eine lokale Minimalstelle (einen Tiefpunkt) an der Stelle $x = -2$	$f'(-2) = 0$
… hat einen Hochpunkt bei $H\langle -2 \vert 5\rangle$ … hat einen Tiefpunkt bei $T\langle -2 \vert 5\rangle$	$f(-2) = 5$ und $f'(-2) = 0$
… berührt die x-Achse an der Stelle $x = 3$	$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$
… hat eine doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 3$	$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$
… hat im Punkt $P\langle 1 \vert -2\rangle$ die Steigung 3	$f(1) = -2$ und $f'(1) = 3$
… hat an der Stelle $x = -2$ eine Tangente, die parallel zu $g(x) = 0{,}5x$ ist.	$f'(-2) = 0{,}5$
… hat einen Wendepunkt bei $P\langle -3 \vert 5\rangle$	$f(-3) = 5$ und $f''(-3) = 0$
… besitzt an der Stelle $x = -1$ eine Wendetangente mit der Steigung 2	$f'(-1) = 2$ und $f''(-1) = 0$
… schneidet die erste Winkelhalbierende bei $x = 2$ senkrecht	$f(2) = 2$ und $f'(2) = -1$
… besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt.	$f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$