Blatt 9 - Exponentialgleichungen

Freitag, 23. August 2024 21:35

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Exponentialgleichungen

a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2} \quad | \, 25^{\wedge}$

$\cancel{25}^{\log_{25} x} = 25^{-\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

a) 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 8 \quad | \, \sqrt{3}^{\wedge}$

$x = \sqrt{3}^{8} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{8} = 3^{4} = 81$

Aufgabe 1 Berechnen Sie jeweils die unbekannte Größe x.

(a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ $\quad \log_{\sqrt{3}} x = 8$ $\quad \log_{\sqrt{5}} x = 6$ $\quad \log_{9} x = \frac{1}{4}$

(b) $\log_{x} 16 = 4$ (c) $\log_{x} 27 = 3$ (d) $\log_{4}(5x-1) = -1$

(e) $\log_{2}(x^2-1) = 4$ (f) $\log_{5} x^2 = 3$ (g) $\log_{x}(x+6) = 2 \quad | \, x^{\wedge}$

$x+6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \quad | \text{PQ}$

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\cancel{x_1 = -2}$ oder $x_2 = 3$

entfällt, Bedingung Basis

(h) $\log_{x}(15-2x) = 2$ (i) $\log_{x}(32-4x^2) = 4$

Aufgabe 2 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in $\mathbb{R}$.

(a) $2^x = 5$ (b) $3^x = 24$ (c) $4^x = \frac{1}{3}$

(d) $2^{x+2} = 5$ (e) $3^{4x} = 5$ (f) $4^{2x+1} = 5$

2) a) $2^x = 5 \quad | \log_2$

$x = \log_2 5$

oder

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\ln 2^x = \ln 5$ 3. Log-Gesetz

$x \cdot \ln 2 = \ln 5 \quad | :\ln 2$

$x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Exponentialgleichungen.

(a) $3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$ (b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^2 = 34 \Leftrightarrow 2^x \cdot (2^{-2} + 2^2) = 34$

$2^x = \frac{34}{(2^{-2}+2^2)}$

$2^x = \frac{34}{\frac{1}{4}+4} = \frac{34}{\frac{17}{4}} = 8$

$x = 3$

(c) $2^{x+2} + 2^x = 40$ (d) $2^{x+3} + 2^x = 144$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ folgender Exponentialgleichungen.

(a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$ (b) $2^x + 4 = 32 \cdot 2^{-x}$

(c) $3^x + 6 \cdot 3^{-x} = 5$ (d) $3^x + 6 = 27 \cdot 3^{-x}$

(e) $2^{x+2} + 1 = 2^{-x-1}$ (f) $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$

(g) $2^{x-2} = 2^{3-x} + 1$ (h) $2^{x+1} - \frac{1}{2^x} = 1$

Aufgabe 5 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in $\mathbb{R}$.

(a) $16^x - 12 \cdot 4^x + 32 = 0$ (b) $3^{2x+1} \cdot 3^{x-1} = 1$

Aufgabe 6 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Logarithmengleichungen.

gemeinsam

(a) $\ln x^5 = \ln x^2 + 6$

$\underbrace{\ln x^5 - \ln x^2}_{\text{2. Log.-Gesetz}} = 6$

$\ln\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = 6$

$\ln(x^3) = 6 \quad | \, e^{\wedge}$

$x^3 = e^6 \quad | \, ^{\wedge}\frac{1}{3}$ oder $x^3 = e^6 \quad | \sqrt[3]{\,}$

$(x^3)^{\frac{1}{3}} = (e^6)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad x = \sqrt[3]{e^6} = (e^6)^{\frac{1}{3}} = e^2$

$x = e^2$

(b) $\frac{1}{3}\lg x^2 + \frac{1}{2}\lg x^3 = \frac{2}{100}$

3. Log.-Gesetz

$\lg(x^2)^{\frac{1}{3}} + \lg(x^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{100}$

$\underbrace{\lg x^{\frac{2}{3}} + \lg x^{\frac{3}{2}}}_{\text{1. Log-Gesetz}} = \frac{2}{100}$ $\qquad \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{13}{6}$

$\lg(x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{100}$

$\lg(x^{\frac{13}{6}}) = \frac{2}{100}$

$\lg(x^{\frac{13}{6}}) = \frac{2}{100} \quad | \, 10^{\wedge}$ $\quad \lg = \log_{10}$

$x^{\frac{13}{6}} = 10^{\frac{2}{100}} \quad | \, ^{\wedge}\frac{6}{13}$

$\left(x^{\frac{13}{6}}\right)^{\frac{6}{13}} = \left(10^{\frac{2}{100}}\right)^{\frac{6}{13}}$

$x = 10^{\frac{12}{1300}}$

3) a) $\underbrace{3^{x-1}}\,+\,\underbrace{3^{x+2}} = 84 \quad |$ 1. Potenzgesetz

$\Leftrightarrow 3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 84$

$3^x \cdot (3^{-1} + 3^2) = 84$

$3^x = \frac{84}{3^{-1}+3^2} = \frac{84}{\frac{1}{3}+9} = \frac{84}{\frac{28}{3}} = \frac{\cancel{84}^{3} \cdot 3}{\cancel{28}_{1}} = 9$

$3^x = 9 \quad | \ln$ $\quad$ Kopfrechnung $\Rightarrow x = 2$

$\ln 3^x = \ln 9$

$x \cdot \ln 3 = \ln 9$

$x = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$

Logarithmengesetze, für $a > 0$, $x > 0$ und $y > 0$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
3. $$\log_a(x^n) = n \cdot \log(x),$$
$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_a(x),$$

Die wichtigsten Potenzgesetze

Multiplikation und Division bei gleichen Basen:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a \in \mathbb{R}$	$m,n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$m,n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a,b \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a,b \in \mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a \in \mathbb{R}$	$m,n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a \in \mathbb{R}^*_+$	$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$a^0 = 1$ $\quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Q}$

Quelle: https://123mathe.de/exponentialgleichungen-loesen-regeln

3. Potenzgesetz

I $x^2 \cdot x^3 = x^5$

II $\frac{x^7}{x^4} = x^3$

III $(x^2)^4 = x^8$

4) a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$ $\quad$ 3. Potenzgesetz

$4 \cdot (2^x)^2 - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$

$\boxed{z = 2^x}$

$4 \cdot z^2 - 35 \cdot z + 24 = 0 \quad | :4$

$z^2 - \frac{35}{4} \cdot z + 6 = 0 \quad | \text{PQ}$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{1225}{64} - \frac{384}{64}}$

$= \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{841}{64}}$

$= \frac{35}{8} \pm \frac{29}{8}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ oder $z_2 = \frac{64}{8} = 8$

$2^x = \frac{3}{4} \quad | \ln$ $\qquad 2^x = 8$

$\Rightarrow$ Kopf $x = 3$

$\ln 2^x = \ln \frac{3}{4}$

$x \cdot \ln 2 = \ln \frac{3}{4}$

$x = \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2}$

3^x

$\ln 3^x$

$x \cdot \ln 3$