26.08.2024

Freitag, 8. März 2024 20:39

11 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

11.1 Kartesische Darstellung

$\mathbb{R}$

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen. Definiert man die Zahl i mit $i^2 = -1$, die sogenante imaginäre Einheit, lassen sich Gleichungen lösen, die in den rellen Zahlen keine Lösung haben. Betrachte folgende Gleichung:

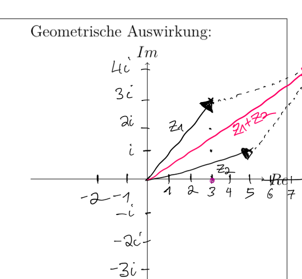
$$x^2 + 4 = 0 \quad |-4$$
$$x^2 = \pm\sqrt{-4} \quad |\sqrt{\ }$$ ↯ keine Lösung in $\mathbb{R}$
$$x^2 = \pm\sqrt{4i^2}$$
$$x = \pm 2i$$ Lösungen in $\mathbb{C}$

$-4 = (-1)\cdot 4 = i^2\cdot 4$

Dies bedeutet, dass jede algebraische Gleichung positiven Grades über den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt, was für reelle Zahlen nicht gilt. Diese Eigenschaft ist der Inhalt des Fundamentalsatzes der Algebra. Ein Polynom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ auch n NS (reelle bzw. konjugiert komplexe Lösungen (Paare))

Komplexe Zahlen lassen sich graphisch darstellen als Pfeile (Zeiger) in der sog. Gauß'schen Zahlenebene:

Geometrische Auswirkung:



Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl:

$$z = a + b \cdot i$$

Realteil, Imaginärteil

Bsp:

$z_1 = 3 + 3 \cdot i$

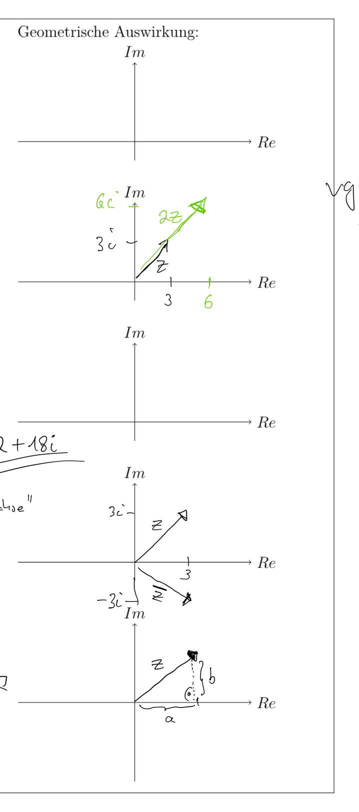
$z_2 = 5 + 1 \cdot i$

$\boxed{z_1 + z_2}$
$= 3+3i + 5 + 1i$
$= 8 + 4i$

"geometrisch" Zeiger werden aneinander gehangen !

Addition:
$z_1 + z_2 =$

Geometrische Auswirkung:



vgl. Vektorrechnung
Länge des Zeigers verändert sich

Multiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl):
$2 \cdot z_1 = 2\cdot(3+3i)$
$= 6 + 6i$

Multiplikation zweier komplexer Zahlen:
$z_1 \cdot z_2 = (3+3i)\cdot(5+1i)$
$= 15 + 3i + 15i + 3i^2 = 12 + 18i$ (mit $i^2 = -1$)

Konjugiert komplexe Zahl:
$\bar{z}_1 = 3 - 3i$ "Spiegelung an x-Achse"

$z_1 = 3+3i$

Betrag (Länge) einer komplexen Zahl:
$|z|$

$z = a + b\cdot i$
Pythagoras
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

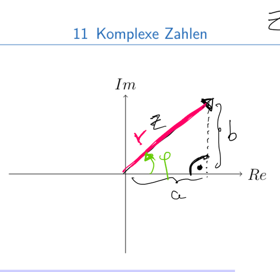
Es gilt: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

11.2 Trigonometrische Darstellung

Ein Zeiger lässt sich auch eindeutig über dessen Länge r und dem Winkel φ, den dieser mit der x-Achse einschließt, beschreiben. Dies sind die sogenannten Polarkoordinaten (r, φ).

Radius, Winkel

$z = a + b\cdot i$



Trigonometrie

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ $\frac{\text{"Ankath."}}{\text{"Hypoth."}}$ $\Leftrightarrow$ $r\cdot\cos\varphi = a$ bzw. $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ $\frac{\text{"Gegenkath."}}{\text{"Hyp"}}$ $r\cdot\sin\varphi = b$

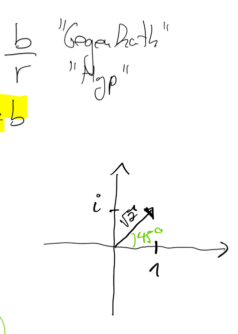
$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$ arccos

Definition 2.1: Bestimmung der Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & \text{falls } b \geq 0 \text{ (Zeiger oberhalb x-Achse)} \\ 360^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

Beispiel: $z = 1 + i$



dann $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$ "DEG"

$z = \sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ) + \sqrt{2}\cdot i\cdot\sin(45^\circ)$

Mittels Polarkoordinaten lässt sich eine komplexe Zahl nun in Trigonometrischer Form darstellen:

$$z = \underbrace{r \cdot \cos\varphi}_{a} + \underbrace{r \cdot \sin\varphi}_{b} \cdot i$$

11.3 Darstellung in Exponentialform

Ebenfalls mittels Polarkoordinaten ergibt sich die Darstellung in Exponentialform, die z.B. bei der Bestimmung von Potenzen einer komplexen Zahl hilfreich ist.

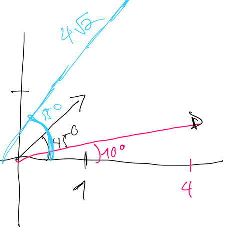
! Praxis $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$

In Exponentialform: $z_1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45^\circ}$ und $z_2 = 4\cdot e^{i\cdot 10^\circ}$

→ gut bei Multiplikation / Potenzieren !

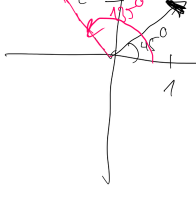
$z_1 \cdot z_2$
$= \sqrt{2}e^{i\cdot 45^\circ}\cdot 4\cdot e^{i\cdot 10^\circ}$
$= \sqrt{2}\cdot 4 \cdot e^{i\cdot 55^\circ}$

geometrisch ⟹ Radien werden multipliziert und Winkel addiert !



z_1^3
$= (1+i)^3$
⇓ Exponentialdarstellung
$= \left(\sqrt{2}e^{i\cdot 45^\circ}\right)^3$
$= \sqrt{2}^3 e^{i\cdot 135^\circ}$

⟹ geometrisch Radius wird mit n potenziert, Winkel mit n multipliziert



Die nach Leonhard Euler benannte Eulerformel (Herleitung über Taylorreihen möglich) stellt eine Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Exponentialfunktionen mittels komplexer Zahlen dar:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)}$$

Für den Winkel $\varphi = \pi$ ergibt sich aus der Euler'schen Formel die sogenannte Eulersche Identität

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi)$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$

$$e^{i\pi} = -1 \quad |+1$$

Eine der bekanntesten Formeln in der Welt, die einen Zusammenhang zwischen vier der bedeutendsten mathematischen Konstanten herstellt: der Euler'schen Zahl e, der Kreiszahl π, der imaginären Einheit i sowie der reellen Einheit 1. Umgeformt kommt noch die Null als weitere mathematisch bedeutende Konstante hinzu:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

T-Shirt
Poster

13 Mengen und Ungleichungen

13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen

Aufgabe 1 $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
Geben Sie an, welche Zahlen zu den folgenden Mengen gehören.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 8\}$
(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} | -2 \leq y \leq 4\}$ $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
(c) $C = \{z \in \mathbb{N} | z \text{ ist Teiler von } 24\}$ $= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
(d) $D = \{x \in \mathbb{P} | x \leq 40\}$ Primzahlen
(e) $E = \{z \in \mathbb{Z} | |z| < 5\}$ $= \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ Betrag

vereinigt: $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ logisch: "ODER"
geschnitten: $A \cap B = \{3, 4\}$ logisch: "UND"
"ohne": $A \setminus B = \{5, 6, 7, 8\}$

Aufgabe 2
Geben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Bedingung an, welche die Elemente erfüllen müssen (vgl. Aufgabe 1). $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x \leq 8\}$

(a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(b) $B = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 5\}$
(c) $C = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
(d) $D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
(e) $E = \{4, 5\}$
(f) $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Aufgabe 3
Berechnen Sie...
$A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus D$, $D \setminus C$, $D \cup E$ und $E \cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe 1!
(b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

Aufgabe 4
Geben Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.
$A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus D$, $D \setminus C$, $D \cup E$ und $E \cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe 1!
(b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

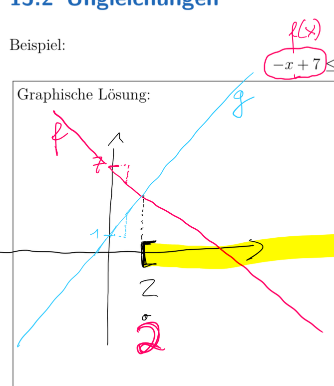
$x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 8$
$[3; 8]$ abgeschlossenes Intervall
$]2; 9[$ offenes Intervall (2 bzw. 9 nicht enthalten)
bzw. $(2; 9)$
bzw. $2 < x < 9$

13.2 Ungleichungen

Beispiel:

$$\underbrace{-x + 7}_{f(x)} \leq \underbrace{2x + 1}_{g(x)}$$

Graphische Lösung:



Rechnung:

$-x + 7 \leq 2x + 1 \quad |-2x \quad |-7$
$-3x \leq -6 \quad |:(-3)$!
$x \geq +2$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

als Intervall $[2; +\infty)$

Merke:

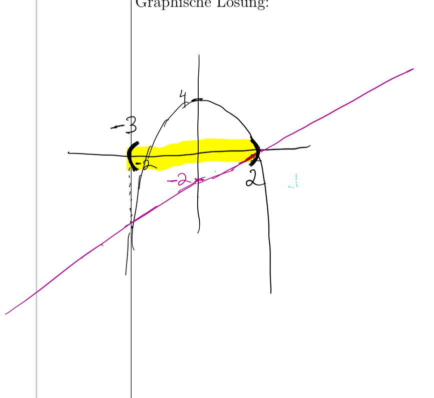
Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Relationszeichen um!!!

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung.

$$-x^2 + 4 > x - 2$$

Tipp: Stellen Sie die Ungleichung so um, dass eine Seite null wird. Bestimmen Sie dann die Linearfaktorzerlegung und führen damit eine Fallunterscheidung durch.

Graphische Lösung:



Rechnung:

$-x^2 + 4 > x - 2 \quad |-x \quad |+2$
$-x^2 - x + 6 > 0 \quad |\cdot(-1)$!
$x^2 + x - 6 < 0$
$(x+3)\cdot(x-2) < 0$

1. Fall: + − oder
2. Fall: − +

Nullstellen:
$-x^2 - x + 6 = 0 \quad |:(-1)$
$x^2 + x - 6 = 0 \quad |$ PQ
$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$
$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$
$x_1 = -3$ oder $x_2 = 2$

1. Fall: $x + 3 > 0$ und $x - 2 < 0$
$x > -3$ und $x < 2$

$\mathbb{L}_1 = -3 < x < 2$

2. Fall: $x + 3 < 0$ und $x - 2 > 0$
$x < -3$ und $x > 2$ ↯ keine Lösung ! kein x, das beides erfüllt !

$\mathbb{L}_2 = \emptyset$ leere Menge

aus beiden Lösungen wird die gesamte Lösung über Vereinigung $\cup$ zusammengesetzt

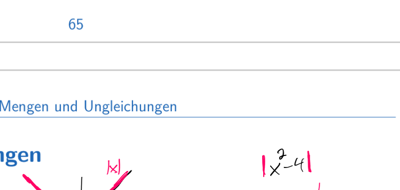
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = -3 < x < 2$

13.3 Betragsungleichungen

$|-4| = 4$
$|3| = 3$

Wiederholung:

$$f(x) = |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



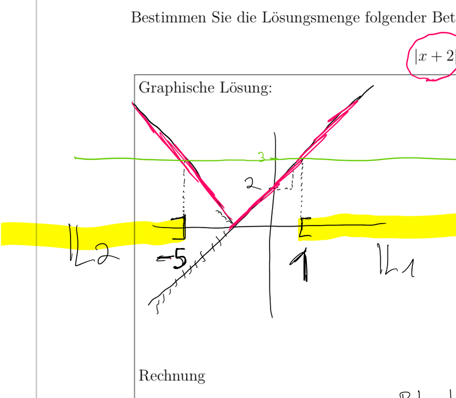
Merke:

Bei der rechnerischen Lösung kann folgender Zusammenhang hilfreich sein: $|x|^2 = x^2$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$$|x + 2| \geq 3$$

Graphische Lösung:



Rechnung: mittels Fallunterscheidungen:

1. Fall: $x + 2 \geq 0 \quad |-2$
$x \geq -2$
⟹ dann können die Betragsstriche entfallen.
$x + 2 \geq 3 \quad |-2$
$x \geq 1$

Schnittmenge ⟹ $\mathbb{L}_1$: $x \geq 1$

2. Fall: $x + 2 < 0$ (im Betrag steht etwas Negatives)
für $x < -2$
⟹ $-(x+2) \geq 3 \quad |\cdot(-1)$!
$x + 2 \leq -3 \quad |-2$
$x \leq -5$

Betragsstriche weg, aber alles in Klammern und davor ein Minuszeichen, siehe Def. Betrag

Schnittmenge: $\mathbb{L}_2$ ⟹ $x \leq -5$

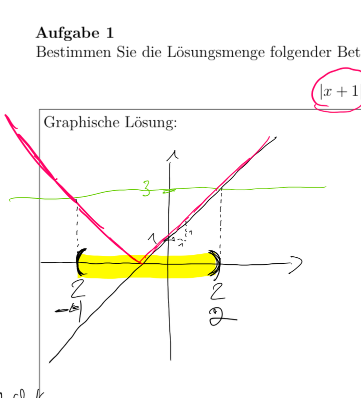
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$
oder
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ oder } x \leq -5\}$

Rechnung

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$$|x + 1| < 3$$

Graphische Lösung:



Rechnung:

1. Fall: $x + 1 \geq 0$
für $x \geq -1$,
dann $x + 1 < 3 \quad |-1$
$x < 2$

Schnittmenge

$\mathbb{L}_1 = -1 \leq x < 2$

2. Fall: $x + 1 < 0$
für $x < -1$
dann $-(x+1) < 3 \quad |\cdot(-1)$
$x + 1 > -3$
$x > -4$

Schnittmenge

$\mathbb{L}_2$ $-4 < x < -1$

Vereinigung
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$
$-4 < x < 2$

Rechnung

3. Möglichkeit
Verwende: $|x|^2 = x^2$

$|x+1| < 3 \quad |^2$
$(x+1)^2 < 9 \quad |\sqrt{\ }$
$x + 1 < \pm 3$
$x + 1 < 3$ oder $x + 1 < -3$
$x < 2$ oder $x < -4$