# Mitschrift 12.02.2025

Samstag, 8. Februar 2025 22:09

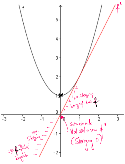
## 5 Differentialrechnung Teil 2

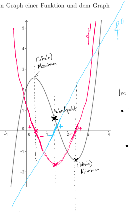
Morgen Start 17:15

### 5.1 Graphisches Ableiten

Im Folgenden sollen Zusammenhänge zwischen dem Graph einer Funktion und dem Graph deren Ableitung identifiziert werden.

$f(x) = x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$





Im Wendepunkt:

- Steigung ist hier extremal (am größten/kleinsten) (hier geht es am steilsten bergauf/bergab)
- hier ändert sich die Krümmung des Graphen ("Straßenverlauf") von links nach rechts bzw. umgekehrt

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

| $f$ hat | $f'$ hat | $f''$ hat |
|---|---|---|
| ein Minimum | eine schneidende NS von − nach + | positiver Wert, also $f''>0$ (da f' hier ansteigt und dessen Steigung, also f'', positiv sein muss!) |
| ein Maximum | " " " " + " − | negativer Wert, also $f''<0$ (da f' bergab verlaufen muss) |
| ein Wendepunkt | ein Minimum / Maximum | eine schneidende NS von − nach +<br>bzw. + " − |
| einen Sattelpunkt (WP mit Steigung 0) | eine berührende NS (doppelte NS) | " |

### 5.2 Berechnung von Extrema

Die zuvor festgestellten Zusammenhänge werden nun für die Berechnung von Extrema verwendet, am Beispiel von:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12$$

① **Notwendige Bedingung:**

$$f'(x) = 0$$

(Nullstellen von f' ≙ Steigung)

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad |:3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad |\,PQ$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$$
$$= 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$
$$\underline{\underline{x_1 = 1}} \text{ oder } \underline{\underline{x_2 = 3}}$$

(x-KO von möglichen Extrema (Hoch- bzw. Tiefpunkt))

② Überprüfung, welche Art

**Hinreichende Bedingung:**

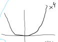
1. Möglichkeit mittels Vorzeichenwechselkriterium von $f'$

betrachte $x = 1$:
davor Steigung: $f'(0) = \cancel{3 \cdot 0^2} - \cancel{12 \cdot 0} + \underline{\underline{9}}$ positive Steigung
dahinter Steigung: $f'(2) = \underset{12}{3 \cdot 2^2} - \underset{-24}{12 \cdot 2} + \underset{+9}{9} = -3$ negative
$\rightarrow$ VZW von +/− MAX $\cap$

betrachte $x = 3$:
davor Steigung: $f'(2) = -3$ neg. Steigung
dahinter Steigung: $f'(4) = \underset{48}{3 \cdot 4^2} - \underset{-48}{12 \cdot 4} + \underline{\underline{9}}$ pos. Steigung
$\Rightarrow$ VZW von −/+ $\cup$ MIN

2. Möglichkeit unter Verwendung der 2. Ableitung:
(geht nicht immer, z.B. bei $f(x) = x^4$)

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) \neq 0$$



N.B. $f'(x) = 4x^3 = 0$
$\underline{\underline{x=0}}$

H.B.: $f''(x) = 12x^2$
$f''(0) = 12 \cdot 0^2 = \underline{\underline{0}}$ keine Aussage!

betrachte $x=1$: $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ MAX

betrachte $x=3$: $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ MIN

③ **Berechnung der y-Koordinate:**

für $x = 1$: $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = \underline{\underline{4}}$ $\Longrightarrow$ MAX(1|4)

für $x = 3$: $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$
$= 27 - 54 + 27$
$\Longrightarrow$ MIN(3|0)

## 5.3 Berechnung der Wendepunkte

$f'''(x) = 6$

① **Notwendige Bedingung:**

$$f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$
$$6x = 12$$
$$x = 2$$

② **Hinreichende Bedingung:**

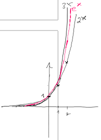
$$f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0$$

$$f'''(2) = 6 \neq 0$$

③ **Berechnung der y-Koordinate:**

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2$$
$$= 8 - 24 + 18 = 2$$

$$WP(2 \mid 2)$$



# 6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

## 6.1 Die $e$-Funktion

Bsp: $f(x) = 2^x$ oder $f(x) = 3^x$

Exponent

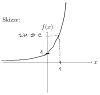
Basis

Die $e$-Funktion ist eine Exponentialfunktion mit Basis $e \approx$ 2,71….. , der sog. Euler'schen Zahl, benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler….. .

$$f(x) = e^x \approx 2{,}71\ldots^x$$

Abbildung 6.1: Leonhard Euler [11], 1707-1783

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der $e$-Funktion sind:

D= $\mathbb{R}$

W= $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_{>0}$ ! nur positive Werte
Wertebereich (Menge aller y-Werte)
⇒ nur oberhalb der x-Achse
⇒ keine NS !

$f'(x) = e^x$

**Merke:**

Für die Ableitung der $e$-Funktion gilt:
Die $e$-Funktion bleibt unverändert, davor schreibt man die Ableitung des Exponenten als Faktor (siehe Kettenregel).

$$f(x) = e^{5x}$$
$$f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$$

Beispiele:

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = e^{2x}$<br>$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ | $f(x) = e^{3x+1}$<br>$f'(x) = 3 \cdot e^{3x+1}$ | $f(x) = e^{x^2}$<br>$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ |
| $f(x) = e^{-x}$<br>$f'(x) = -e^{-x}$ | $f(x) = e^{2x} + x^2 + 4x$<br>$f'(x) = 2e^{2x} + 2x + 4$ | $f(x) = x^2 + e^x$<br>$f'(x) = 2x + e^x$ |

$$f(x) = \overset{u}{x^2} \bullet \overset{v}{e^x}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2x} \cdot \underset{v}{e^x} \underset{+}{+} \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v'}{e^x}$$
$$= e^x \cdot (2x + x^2)$$

Ein Produkt von zwei Funktionstermen kann nicht einfach einzelnd, wie bei einer Summe, abgeleitet werden:

$$f(x) = x^2 + e^{4x} \qquad f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$$

**Definition 1.1: Produktregel**

Die Funktionen $u$ und $v$ seien im gemeinsamen Definitionsbereich überall differenzierbar. Dann gilt:

$$\underbrace{(u \cdot v)'}_{\text{Aufgabe}} = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

Beispiele:

$$f(x) = \overset{u}{e^{2x}} \cdot \overset{v}{4x}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2e^{2x}} \cdot \underset{v}{4x} + \underset{u}{e^{2x}} \cdot \underset{v'}{4}$$
$$= e^{2x}(8x + 4)$$

$$f(x) = \overset{u}{x^2} \cdot \overset{v}{e^{-x}}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2x} \cdot \underset{v}{e^{-x}} + \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v'}{(-e^{-x})}$$
$$= e^{-x}\cdot(2x - x^2)$$

$$f(x) = \overbrace{(x^2 - 2x)}^{u} \cdot \overbrace{e^{\frac{1}{2}x}}^{v}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{(2x-2)} \cdot \underset{v}{e^{\frac{1}{2}x}} + \underset{u}{(x^2-2x)} \cdot \underset{v'}{\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left((2x-2) + (x^2-2x)\cdot\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left(2x - 2 + \tfrac{1}{2}x^2 - x\right)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^2 + x - 2\right)$$

$$f(x) = \overbrace{e^{2x+1}}^{u} \cdot \overbrace{(x-3)}^{v}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2e^{2x+1}} \cdot \underset{v}{(x-3)} + \underset{u}{e^{2x+1}} \cdot \underset{v'}{1}$$
$$= e^{2x+1}\cdot\left(2\cdot(x-3) + 1\right)$$
$$2x - 6 + 1$$
$$= e^{2x+1}\cdot(2x-5)$$

Damit man mit der ersten Ableitung weiter rechnen kann (um beispielsweise Extrema zu bestimmen), klammert man den e-Term aus.

Übung: Klammern Sie in den Ableitungen aus obiger Übung jeweils den $e$-Term aus.

**Exkurs:** Gewinnung der Euler'schen Zahl aus der Tangente an der Stelle $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Für eine allgemeine Exponentialfunktion mit Basis $a>0$ gilt: $f(x) = a^x$

Potenzgesetz $\boxed{a^{x+h} = a^x \cdot a^h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\cdot(a^h - 1)}{h},$$
$$= a^x \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}}$$

müsste 1 sein wenn die Ableitung wieder die Funktion selbst sein soll!

Idee!

2. Für welche Basis a ist dies der Fall

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} \overset{!}{=} 1$$
$$\frac{a^h - 1}{h} = 1 \quad | \cdot h$$
$$a^h - 1 = h \quad | + 1$$
$$a^h = h + 1 \quad | \,^{\left(\frac{1}{h}\right)}$$
$$\left(a^h\right)^{\frac{1}{h}} = (h+1)^{\frac{1}{h}}$$
$$a = (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

also $a = \lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$

für $h = 0{,}1 \Rightarrow a = 2{,}5937\ldots$

$h = 0{,}01 \Rightarrow a = 2{,}70489$

$h = 0{,}001 \Rightarrow a = 2{,}716923$

$h = 0{,}0001 \Rightarrow a = 2{,}718145$

$h = 0{,}00001 \Rightarrow a = 2{,}718268$

$a = e$ (Euler'sche) Zahl

also $e \approx \lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$

man findet dies oft in folgender Form, $\frac{1}{h} = n \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{n} = h}$

$$e \approx \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$$

$$\boxed{e \approx \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$ Definition über Grenzwert!

Wie ist die Basis $a$ zu wählen, damit dieser Grenzwert 1 ergibt? Zunächst wird der Grenzwert anders notiert, indem $h$ durch $\frac{1}{n}$ ersetzt wird.

Lässt man nun $n \to \infty$ laufen, ergibt sich als gesuchte Basis und als mögliche Definition der Euler'schen Zahl $e$:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

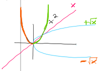
$f(x) = 2^x \quad f^{-1}(x) = \log_2 x$

$f(x) = 10^x \quad f^{-1}(x) = \log_{10} x = \lg x$

$f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \log_e x = \ln(x)$

## 6.2 Die ln-Funktion

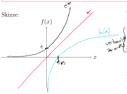
Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist eine sog. Logarithmusfunktion zur Basis $e$ (natürlicher Logarithmus) und die Umkehrfunktion der e-Funktion.



**Merke:**

Die Umkehrfunktion entsteht graphisch, wenn man den monoton steigenden (bzw. fallenden) Bereich (nur hier ist eine Funktion umkehrbar, vgl. $f(x) = x^2$) an der Geraden $g(x) = x$ spiegelt. Rechnerisch erhält man diese durch Vertauschen von $x$ und $y$ und möglicher Umformung nach $y$.

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der *ln*-Funktion sind:

vertauscht zur e-Fkt

D= $\mathbb{R}_{>0}$ (nur positive Zahlen!)

W= $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

### 6.2.1 Ableitung der Umkehrfunktion

Offensichtlich gilt

$$x = f(f^{-1}(x))$$

Ableiten unter Verwendung der Kettenregel liefert als Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

**Merke:**

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Trick:

### 6.2.2 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen

Falls die Variable im Exponenten und/oder in der Basis vorkommt, kann man die Funktion wie folgt als e-Funktion schreiben und dann ableiten:

$f(x) = (x)^{3x}$

umschreiben!

$f(x) = \cancel{e}^{\cancel{\ln}(x)^{3x}} = (x)^{(3x)}$

$\cancel{\sqrt{x^{\cancel{2}}}} = x$

$f(x) = e^{\ln(x)^{3x}} \underset{\text{3. log-Gesetz}}{=} e^{\boxed{3x\cdot\ln(x)}}$

$\log u^{v} = v\cdot\log u$

$\Downarrow f'$

$f'(x) = (\underset{\text{Produktregel}}{\boxed{\overset{u}{3x}\cdot\overset{v}{\ln(x)}}})' \, e^{3x\cdot\ln(x)}$

$= (\underset{u'\cdot v}{3\cdot\ln(x)} + \underset{u\cdot v'}{3\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}})\,\underbrace{e^{3x\cdot\ln(x)}}_{\text{zurückersetzen}}$

$= (3\ln(x)+3)\cdot(x)^{3x}$

---

## 6.3 Quotientenregel

Sind die Funktionen $u$ und $v$ in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich an der Stelle $x$ differenzierbar und es gilt $v(x) \neq 0$, dann gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$ $\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$

$f'(x) = \frac{\overset{u'}{2}\cdot\overset{v}{(x^2-4)} - \overset{u}{(2x+1)}\cdot\overset{v'}{2x}}{\underset{v^2}{(x^2-4)^2}}$

$= \frac{2x^2-8-4x^2-2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-2x-8}{(x^2-4)^2}$

---

# 7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

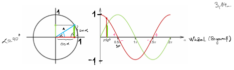
## 7.1 Die $sin(x)$-Funktion

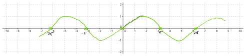
Die Sinusfunktion $f(x) = sin(x)$ ist eine sogenannte trigonometrische Funktion. Man erhält den Graphen, indem man abhängig von dem Winkel $x$, der auf der $x$-Achse abgetragen wird, die Länge der Gegenkathete des Winkels $x$ im Einheitskreis, also den $sin(x)$, als $y$-Wert einträgt (vgl. Animation auf Wikipedia [13]):

$2\pi \mathrel{\hat{=}} 360°$

$3{,}14\ldots \approx \pi \mathrel{\hat{=}} 180°$

$\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$





Eigenschaften der Sinus-Funktion:

ganze Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Nullstellen: $x_n = n\cdot\pi$, mit $n\in\mathbb{Z}$

abgeschlossenes Intervall

Wertebereich: $[-1;1]$ $-1 \le x \le 1$

Extremstellen: $x_E = \frac{\pi}{2}+n\pi$, mit $n\in\mathbb{Z}$

x-Ko von Hoch-Tiefpkt.

y-Achsenschnitt: $S_y(0|0)$

Wendestellen: siehe NS

Symmetrie: punktsymmetrisch

Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x) =$ $\cos(x)$

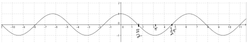
---

**Definition 1.1: Ableitungskreislauf für Sinus/Cosinus**

Es gilt:

$$\begin{tikzcd}
\sin(x) \arrow[d] \\
\cos(x) \arrow[d] \\
-\sin(x) \arrow[d] \\
-\cos(x) \arrow[uuu, bend left, "f'"]
\end{tikzcd}$$

Eigenschaften der Kosinusfunktion:



Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Nullstellen: $x_n = \frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

Wertebereich: $[-1;1]$

Extremstellen: $x_E = n\cdot\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

y-Achsenschnitt: $S_y(0|1)$

Wendestellen: s.o.

Symmetrie: achsensymmetrisch

---

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = 10\sin(x)$

$f'(x) = 10\cdot\cos(x)$

$f(x) = \overset{u}{e^x}\cdot\overset{v}{\sin(x)}$

$f'(x) = \underset{u'}{e^x}\cdot\underset{v}{\sin(x)} + \underset{u}{e^x}\cdot\underset{v'}{\cos(x)}$

$= e^x\cdot(\sin(x)+\cos(x))$

äußere Fkt

innere Fkt

$f(x) = \sin(\boxed{x^2})$

$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{innere Abl.}}\cdot\underbrace{\cos(\boxed{x^2})}_{\text{äußere Abl. (mit innere Fkt eingesetzt)}}$

$f(x) = \sin^2(x) = \overset{u}{\sin(x)}\cdot\overset{v}{\sin(x)}$

$f'(x) = \underset{u'}{\cos(x)}\cdot\underset{v}{\sin(x)} + \underset{u}{\sin(x)}\cdot\underset{v'}{\cos(x)}$

$= \underline{\underline{2\sin(x)\cdot\cos(x)}}$

ODER mittels Kettenregel

$f(x) = (\sin(x))^2$

$f'(x) = \underbrace{\cos(x)}_{\text{innere Abl}}\cdot\underbrace{2\cdot(\sin(x))^1}_{\text{äußere Abl}} = \underline{\underline{2\sin(x)\cdot\cos(x)}}$

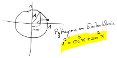
$f(x) = \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\begin{matrix}u\\v\end{matrix}$

$f'(x) = \dfrac{\underset{u'}{\cos(x)}\cdot\underset{v}{\cos(x)} - \underset{u}{\sin(x)}\cdot\underset{v'}{(-\sin(x))}}{\underset{v^2}{(\cos(x))^2}} = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$= \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= \underline{\underline{1 + \tan^2(x)}}$



Pythagoras am Einheitskreis

$1^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$

**Definition 1.2: Kettenregel**

Mittels der Kettenregel lässt sich die Ableitung zweier miteinander verketteter, differenzierbarer Funktionen $f$ und $g$ bestimmen. Es gilt:

$$(f(\boxed{g(x)}))' = g(x)'\cdot f'(g(x))$$

Merke: Innere Ableitung · äußere Ableitung (mit innerer Funktion eingesetzt)

Übungen zur ~~Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:~~ Kettenregel:

$f(x) = (3x+1)^5$

$f'(x) = \underbrace{3}_{\text{innere Abl.}}\cdot\underbrace{5\cdot(\boxed{3x+1})^4}_{\text{äußere Abl}}$

$f(x) = e^{(x^2+2x)}$

$f'(x) = (2x+2)\cdot e^{(x^2+2x)}$

$f(x) = \sin(5x)$

$f'(x) = \underbrace{5}_{\text{innere Abl}}\cdot\underbrace{\cos(5x)}_{\text{äußere}}$