Blatt4-Uebungen_Differentialrechnung

Dienstag, 20. Februar 2024 21:36

Blatt4-Uebungen…

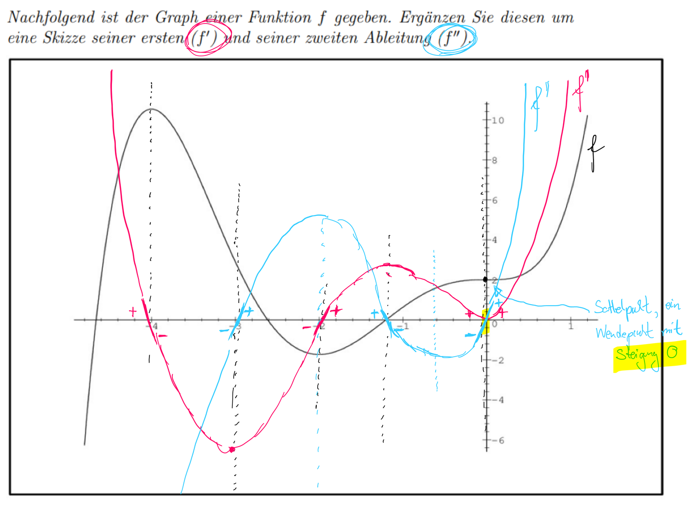
Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 1

Nachfolgend ist der Graph einer Funktion f gegeben. Ergänzen Sie diesen um eine Skizze seiner ersten (f') und seiner zweiten Ableitung (f'').

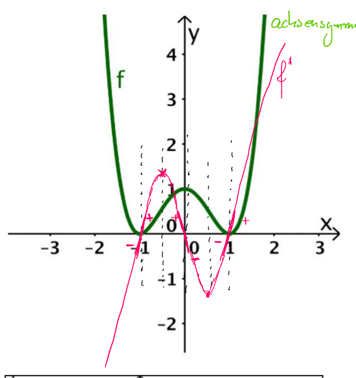


Dr. Markus Schröder

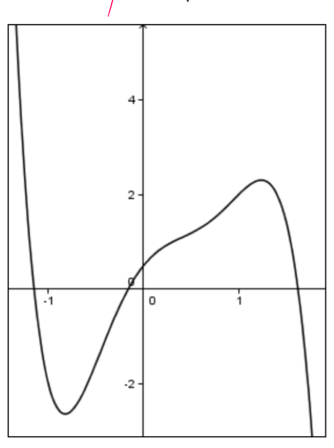
Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 2 Skizzieren Sie f'(x)



achsensymmetrisch $\Rightarrow$ f' muss dann punktsymmetrisch sein?



Quelle: http://www.mathe-trainer.de/Klasse10/Ganzrationale%20Funktionen/grafisches%20ableiten/Block1/Aufg2/Aufg.htm

https://de.serlo.org/mathe/26407/aufgaben-zum-graphischen-differenzieren

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lage und Art der **Extrem~~stellen~~a** *der folgenden Funktionen f_1 und f_2. Bestimmen Sie weiterhin ihre* **Wendestellen** *(hierbei nur notwendige Bedingung).*

$$f_1(x) = x^4 - 8x^2 - 9\,, \qquad f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3\,,$$

Zusatz:

*Folgende Aufgaben sind **jeweils** auszuführen:*

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Linearfaktorzerlegung an.

(ii) Ermitteln Sie die Schnittstelle mit der y-Achse.

(iii) Untersuchen Sie die Funktion auf das Randverhalten.

(iv) Skizzieren Sie den Graph der Funktion in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 4

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 10t \cdot e^{-0.5t}$$

die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t.

(i) Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist.

(ii) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.

Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear

(iii) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $P(6,\ f(6))$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist.

Ableitungen: $f'(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2$

$f''(x) = 4x^3 + 18x^2 + 16x$

$f'''(x) = 12x^2 + 36x + 16$

Extrema:

① Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$x^4 + 6x^3 + 8x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 + 6x + 8) = 0$

$x^2 = 0$ doppelte NS $\Rightarrow$ Sattelpunkt

oder $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-8}$

$= -3 \pm 1$

$x_1 = -4$ oder $x_2 = -2$

② Hinr. Bed.:

- $f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich $\Rightarrow$ ist aber Sattelpunkt siehe ① bzw. Berechnung der Wendepunkte
- $f''(-4) = 4\cdot(-4)^3 + 18\cdot(-4)^2 + 16\cdot(-4) = -32 < 0 \Rightarrow MAX$
- $f''(-2) = 4\cdot(-2)^3 + 18\cdot(-2)^2 + 16\cdot(-2) = 8 > 0 \Rightarrow MIN$

③ y-KO:

$f(0) = 0 \Rightarrow SP(0|0)$

$f(-4) = \frac{1}{5}(-4)^5 + \frac{3}{2}(-4)^4 + \frac{8}{3}(-4)^3 = 8{,}5\overline{3} \Rightarrow MAX(-4|8{,}5\overline{3})$

$f(-2) = -3{,}7\overline{3} \Rightarrow MIN(-2|-3{,}7\overline{3})$

Wendestellen:

① N.B.: $f''(x) = 0$

$4x^3 + 18x^2 + 16x = 0$

$x \cdot (4x^2 + 18x + 16) = 0$

$x = 0$ oder $4x^2 + 18x + 16 = 0 \quad |:4$

$x^2 + \frac{9}{2}x + 4 = 0 \quad |PQ$

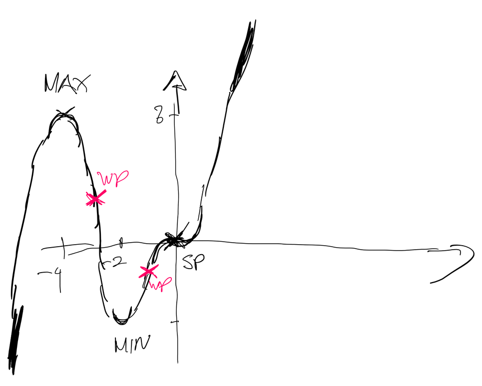
$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{64}{16}}$

$x_1 \approx -3{,}28 \qquad x_2 \approx -1{,}22$

② H.B.: $f'''(0) = 16 \neq 0 \Rightarrow WP$

$f'''(-1{,}22) \neq 0 \Rightarrow WP$

$f'''(-3{,}28) \neq 0 \Rightarrow WP$



③ y-KO:

$f(0) = 0$

f(−3.28)

≈ 3.587097285973

f(−1.22)

≈ −2.059801125973

In GeoGebra:

18:29 Mittwoch 21. Feb. 83 %

$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3$

$f''(-4)$

$= -32$

$f''(-2)$

$= 8$

$f(-4)$

≈ 8.533333333333

$f(-2)$

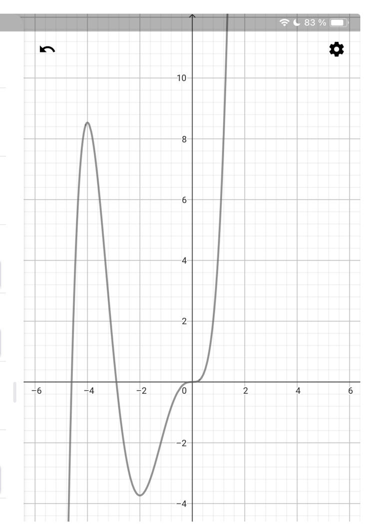
≈ -3.733333333333

Löse(f'(x) = 0)

$= \{x = -4, x = -2, x = 0\}$

NLöse(f''(x) = 0)

$\approx \{x = -3.280776406404, x = -1.219223593596, x = 0\}$



Algebra

Tabelle

oder

wolframalpha.com

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

WolframAlpha

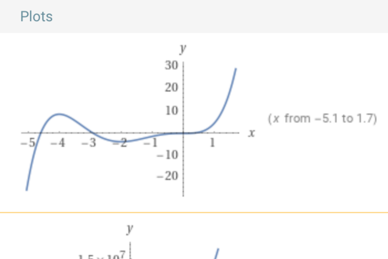
1/5x^5+3/2x^4+8/3x^3

NATURAL LANGUAGE · MATH INPUT · EXTENDED KEYBOARD · EXAMPLES · UPLOAD · RANDOM

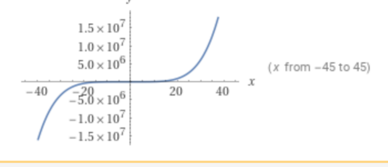
Input

$\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3$

Plots



(x from −5.1 to 1.7)



(x from −45 to 45)

Alternate forms — Enlarge · Data · Customize

$\frac{1}{30}x^3(6x^2 + 45x + 80)$

Enlarge · Data · Customize · Plain Text

$x^3\left(\left(\frac{x}{5} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{8}{3}\right)$

$-\frac{1}{720}(-12x + \sqrt{105} - 45)x^3(12x + \sqrt{105} + 45)$

Roots — Approximate forms · Step-by-step solution

$x = 0$

wolframalpha.com

Roots — Approximate forms · Step-by-step solution

$x = 0$

Enlarge · Data · Customize · Plain Text

$x = -\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{4}$

Enlarge · Data · Customize · Plain Text

$x = \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{4} - \frac{15}{4}$

Polynomial discriminant

$\Delta = 0$

Properties as a real function

Domain

$\mathbb{R}$ (all real numbers)

Enlarge · Data · Customize · Plain Text

Range

$\mathbb{R}$ (all real numbers)

Surjectivity

surjective onto $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ is the set of real numbers

Derivative — Step-by-step solution

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3}\right) = x^2(x^2 + 6x + 8)$

Indefinite integral — Step-by-step solution

$\int\left(\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3}\right)dx = \frac{1}{30}(x^6 + 9x^5 + 20x^4) + \text{constant}$

Local maximum — More digits · Exact form · Step-by-step solution

$\max\left\{\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3}\right\} \approx 8.5333$ at $x = -4$

Local minimum — More digits · Exact form · Step-by-step solution

$\min\left\{\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3}\right\} \approx -3.7333$ at $x = -2$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 5

Ein Designer (Gestalter!) beschließt, seine (zylindrische) Hautcreme-Dose in einer Kugel zu verpacken. Diese soll den Radius $R = 5$ cm besitzen. Wie groß ist dann das maximale Volumen $\mathcal{V}$ des in der Kugel unterzubringenden Zylinders, überlegt er. Aus dem Mathematik-Unterricht von Herrn Fredebeul weiß er noch

$$\mathcal{V}_{Zylinder} = r^2\pi h\,,$$

und nach einigem Nachdenken erkennt er (Begründung??)

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = r^2 + \frac{h^2}{4}\,.$$

Helfen Sie ihm weiter. Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h des optimalen Zylinders. Wie groß ist sein Volumen $\mathcal{V}$? Passt eine Creme mit 300 ml hinein?

Aufgabe 6

a)

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, dessen Graph durch die Punkte $A(1\,|-32)$, $B(-2\,|\,4)$, $C(-3\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0)$ verläuft.

b)

Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: Sie hat im Punkt $(0, 0)$ eine Extremstelle, in $x = 3$ eine Nullstelle und in $x = 1$ die Steigung -3.
Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung!

c) Bestimmen Sie den Term einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades, welche durch den Punkt P(0 |1) verläuft und an der Stelle x= 1 eine Nullstelle und ein Minimum besitzt.