13.02.2025

Mittwoch, 12. Februar 2025 21:38

8 Steckbriefaufgaben und Lineare Gleichungssysteme

8.1 Synthese aus gegebenen Punkten

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Gesucht ist eine Gerade, die durch die Punkte $A(\,1\,|\,3\,)$ und $B(\,-3\,|\,-5\,)$ verläuft:
gesucht: $f(x) = m \cdot x + b$
gegeben:

$A(1|3) \Rightarrow f(1)=3 \Leftrightarrow m \cdot 1 + b = 3$
$B(-3|-5) \Rightarrow f(-3) = -5 \Leftrightarrow m \cdot (-3) + b = -5$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m + b = 3 \\ -3m + b = -5 \end{pmatrix}$

Gesucht ist eine Parabel, die durch die Punkte $A(\,1\,|\,6\,)$, $B(\,2\,|\,11\,)$ und $C(\,-2\,|\,3\,)$ verläuft:
gesucht: $f(x) =$
Merke: … Parameter sind gesucht, dann benötigt man auch … Bedingungen/Informationen
gegeben:

Übung:
Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, die durch die Punkte $A(\,1\,|\,-32\,)$, $B(\,-2\,|\,4\,)$, $C(\,-3\,|\,0\,)$ und $D(\,0\,|\,0\,)$ verläuft:
gesucht: $f(x) =$

8.2 Lineare Gleichungssysteme

8.2.1 Gauß-Verfahren

$$\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -2,5 \end{pmatrix}$$

Ziel: Zahlen für x und y bestimmen, so dass beide Gleichungen erfüllt sind

Man darf:

- eine Gleichung mit Zahl $\neq 0$ multiplizieren/dividieren
- zwei Gleichungen (Zeilen) miteinander addieren (subtrahieren)
- Zeilen (Spalten) vertauschen

Abbildung 8.1: Carl Friedrich Gauß[8], 1777-1855

müssen gleich werden, mit entsprechenden Zahlen multiplizieren

$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -2,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

Nebenrechnung (Kopfrechnung):
$\begin{pmatrix} -6x + 12y = 12 \\ 6x + 2y = -5 \end{pmatrix}$
$0 \quad 14y = 7$

Ziel: hier eine 0 zu bekommen

$3 \cdot \mathrm{I} + 2 \cdot \mathrm{II} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 0 & & 14y & = & 7 \end{pmatrix} \quad |:14$

$\Rightarrow y = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

in I: $-2x + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$
$-2x + 2 = 4 \quad |-2$
$-2x = 2 \quad |:(-2)$
$x = -1$

Lösung aufgeschrieben als ein sogenannter Vektor (Lösungsvektor):

x-Koordinate, y-Koordinate
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Übungen:

a)
$$\begin{pmatrix} -3x & + & y & = & -1 \\ 4x & - & y & = & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{matrix}\begin{pmatrix} x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ -4x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{pmatrix}$$

Idee: I+II, I+III, II+III

übernehmen
$-2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \Rightarrow$, $4 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{III} \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -3 \\ 0 \quad -3y + 7z = 15 \\ 0 \quad 6y - 9z = -15 \end{pmatrix}$

übernehmen
$2 \cdot \mathrm{II} + \mathrm{III} \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -3 \\ 0 \quad -3y + 7z = 15 \\ 0 \quad 0 \quad 5z = 15 \end{pmatrix} \quad :5$

$\boxed{z = 3}$

in II: $-3y + 7 \cdot 3 = 15$
$-3y + 21 = 15$
$-3y = -6$
$\boxed{y = 2}$

in I: $x + 2 - 2 \cdot 3 = -3$
$x + 2 - 6 = -3$
$x - 4 = -3$
$\boxed{x = 1}$

LGS hat eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Übung:

a)
$$\begin{pmatrix} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -2 \\ 0 \quad +1y + 5z = 11 \\ 0 \quad -5y + 8z = 11 \end{pmatrix} \quad \cdot 5$

$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -2 \\ 0 \quad + y + 5z = 11 \\ 0 \quad 0 \quad 33z = 66 \end{pmatrix} \quad |:33$

$\Rightarrow \boxed{z = 2}$

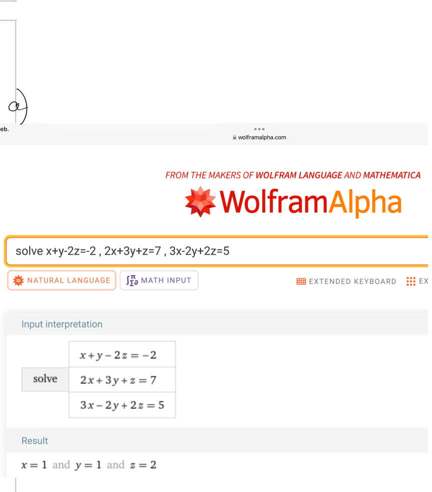
in II: $y + 5 \cdot 2 = 11$
$y + 10 = 11$
$\boxed{y = 1}$

in I: $x + 1 - 2 \cdot 2 = -2$
$x + 1 - 4 = -2$
$x - 3 = -2$
$\boxed{x = 1}$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -6x & + & 9y & = & 2 \end{pmatrix} \cdot 3$$

$\begin{pmatrix} 2x - 3y = 1 \\ 0 \quad 0 = 5 \end{pmatrix}$ ↯ Widerspruch

$\Rightarrow$ LGS hat keine Lösung



Merke:

Bei LGS, die gleich viele Zeilen wie Variablen haben, kann man nach Durchführung des Gauß-Verfahrens (Herstellung der Stufenform) die Lösungsart in der letzten Zeile ablesen, es gibt 3 Fälle:

- $0 \quad 0 \quad 4z = 8$, eindeutige Lösung ($0 \quad 0 \quad 4z = 0 \Rightarrow z = 0$)
- $0 \quad 0 \quad 0 = 5$ ↯, keine Lösung
- $0 \quad y + 2z = 4$; $0 \quad 0 \quad 0 = 0$ Nullzeile, unendlich viele Lösungen

Beispiel zu Fall 3:
$$\begin{pmatrix} 7x & - & 14y & + & 7z & = & 21 \\ x & - & 10y & + & 5z & = & 15 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \cdot 7 \end{matrix}$$

Nullzeile
$\mathrm{II} \begin{pmatrix} 7x - 14y + 7z = 21 \\ 0 \quad 56y - 28z = -84 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{pmatrix}$

aus II: $56y - 28z = -84 \quad |-56y$
$-28z = -84 - 56y \quad |:(-28)$
$\boxed{z = 3 + 2y}$ (z ist abhängig von y)
y ist frei wählbar!

in I: $7x - 14y + 7 \cdot (3 + 2y) = 21$
$7x - \cancel{14y} + 21 + \cancel{14y} = 21 \quad |-21$
$7x = 0 \quad |:7$
$\boxed{x = 0}$

Unendlich viele Lösungen:
$\boxed{x = 0}$
$\boxed{y \text{ ist frei wählbar}}$ $\boxed{y = k}$
$\boxed{z = 3 + 2y}$ $z = 3 + 2k$

Mögliche Lösungen:
wähle $y = 1 \Rightarrow z = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ und $x = 0$
$y = 2 \Rightarrow z = 3 + 2 \cdot 2 = 7$ "
⋮
$y = 10 \Rightarrow z = 3 + 2 \cdot 10 = 23$ "

In Vektorschreibweise:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bsp. $k = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$k = 2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die unendlich vielen Lösungen in Vektorschreibweise:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

Übung:
Das folgende LGS hat unendlich viele Lösungen, berechnen Sie diese und schreiben Sie diese in Vektorschreibweise auf.
$$\begin{pmatrix} 2x & + & 4y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 7z & = & -3 \\ 4x & + & 8y & - & 2z & = & 6 \end{pmatrix}$$

8.2.2 Überbestimmte LGS

Führen Sie, wie gewohnt, das Gauß-Verfahren durch und geben Sie danach die Lösung des LGS an:

a)
$$\begin{pmatrix} 2x & - & 6y & = & 3 \\ x & - & 8y & = & -1 \\ 4x & - & 20y & = & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & = & 7 \end{pmatrix}$$

9 Summen und Reihen

9.1 Gauß'sche Summenformel

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+\ldots+10$$

Endwert; Startwert der Laufvariable (Index) $\Rightarrow$ wird immer um 1 erhöht

Wie lautet die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen?

$$\sum_{i=1}^{100} i = ? \qquad 50 \cdot 101 = 5050$$

1+2+3+4+5+...+49+50+51+...+95+96+97+98+99+100

Abbildung 9.1: Carl Friedrich Gauß [8], 1777-1855

Allgemein für die Summe der natürlichen Zahlen bis n ergibt sich die Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Für $n = 99$: $99 \cdot 50$

Wie kann man die Allgemeingültigkeit dieser Formel beweisen?

0 1 2 3 4 5 6 7 … 48 49 50 51 52 … 95 96 97 98 99 — 50×

9.1.1 Vollständige Induktion

Beweise von Aussagen über natürliche Zahlen erfolgen oft mittels des Beweisverfahrens namens Vollständige Induktion.

Beweise: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang:
Bestätige die Vermutung für das kleinste n:

Für: $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ ✓

2. Induktionsschritt von n nach $n+1$: Induktionsvoraussetzung
Man nimmt an (und darf dabei verwenden), dass die Aussage für n gilt und versucht, durch Umformungen die Aussage für $n+1$ herzuleiten:

Zu zeigen ist, dass die Formel auch für $n+1$ gültig ist:
$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2} \quad \text{Ziel}$$

Start: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$ Trick (den letzten Summanden „rausziehen")
$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n+1) \cdot 2}{2} = \frac{n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot 2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+1+1)}{2}$

9.2 Lineare Regression

1. Ist der Zusammenhang zwischen x und y aus der Theorie bekannt, setzt man entsprechend an.

2. Man orientiert sich an der Punktwolke und sucht einen sinnvollen Funktionstyp als Ansatz.

nicht sinnvoll linear!

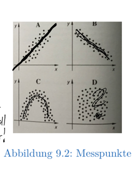
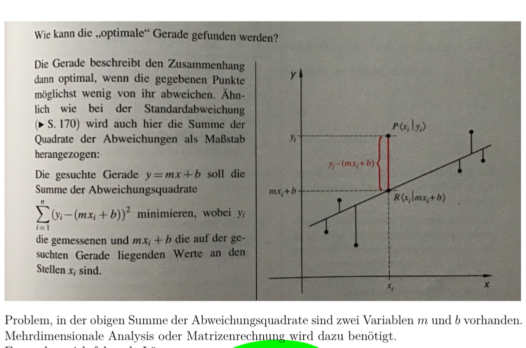


Abbildung 9.2: Messpunkte



Wie kann die „optimale" Gerade gefunden werden?

Die Gerade beschreibt den Zusammenhang dann optimal, wenn die gegebenen Punkte möglichst wenig von ihr abweichen. Ähnlich wie bei der Standardabweichung (▶ S. 170) wird auch hier die Summe der Quadrate der Abweichungen als Maßstab herangezogen:

Die gesuchte Gerade $y = mx + b$ soll die Summe der Abweichungsquadrate $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$ minimieren, wobei y_i die gemessenen und $mx_i + b$ die auf der gesuchten Gerade liegenden Werte an den Stellen x_i sind.

Problem, in der obigen Summe der Abweichungsquadrate sind zwei Variablen m und b vorhanden. Mehrdimensionale Analysis oder Matrizenrechnung wird dazu benötigt.
Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

und $b = \bar{y} - m\bar{x}$ (wobei $\bar{y}$ und $\bar{x}$ jeweils die arithmetischen Mittelwerte der y-Koordinaten bzw. x-Koordinaten sind).

Übung:
Gegeben sind die Punkte $P_1(-3,\ 14)$, $P_2(-2,\ 11)$, $P_3(0,\ 5)$, $P_4(2,\ -1)$ und $P_5(8,\ -19)$.
a) Bestimmen Sie die durch diese festgelegte Regressionsgerade.
b) Bestimmen Sie weiterhin den Korrelationskoeffizient.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y},$$

wobei

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

die Standardabweichung der x-Werte und s_y entsprechend für die y-Werte definiert ist. Liegt r betraglich nahe bei 1, so ist die Näherung gut, sonst schlecht. Was ist hier der Fall?

9.3 Wichtige Reihen

Unendliche Summe (Reihe)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Taylorreihe

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \quad (9.1)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots \quad (9.2)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots \quad (9.3)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \quad (9.4)$$

10 Integralrechnung und ihre Anwendungen

10.1 Unbestimmte Integrale

Betrachtet wird nun die Umkehrung des Ableitens, das Aufleiten bzw. Integrieren:
Gegeben ist eine Funktion f, man sucht eine Funktion F von der diese abstammt, d.h.

Definition 1.1: Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion einer gegebenen Funktion f, falls gilt: $F'(x) = f(x)$.

gegeben: $f(x) = x^2$
gesucht: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4$
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$
allg.: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, mit $c \in \mathbb{R}$

allgemein (Potenzregel):
$f(x) = x^n$
$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

Merke:
Der Exponent wird um 1 erhöht,
davor kommt der Kehrwert des erhöhten Exponenten

Schreibweise: "Integral von x^2 dx"
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
Variable der Funktion

Definition 1.2: Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral
$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$
gibt die Menge aller Stammfunktionen an.

$\int (x^4 + 2x^3)\, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + c$

Wie beim Differenzieren gilt auch beim Integrieren die Faktor und Summenregel.
Als erste Integrationsregel betrachten wir einen Spezialfall der Integration mittels Substitution:

Merke:

Bei einer verketteten Funktion, bei der die innere Funktion linear ist, schreibt man den Kehrwert der inneren Ableitung vor die aufgeleitete äußere Funktion (wobei die innere Funktion darin unverändert bleibt), z.B.:

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c \qquad \int \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + c$$