11 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

11.1 Kartesische Darstellung

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen. Definiert man die Zahl i mit $i^2 = -1$, so erscheint neuartige Zahlen, lassen sich Gleichungen lösen, die in der reellen Zahlen keine Lösung haben. Beispiele folgende Gleichungen:

$x^2 + 1 = 0$ $\quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

$x^2 + x + 1 = 0$ $\quad \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$x^2 + 2x + 2 = 0$ $\quad \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$

Die Lösungen x sind keine reellen Zahlen, sie liegen in $\mathbb{C}$.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung gestalten Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac < 0$ (Diskriminante) lösbar. Die Lösungen sind $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Die Lösungen sind Zahlen der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und i die Wurzel $\sqrt{-1}$ (Imaginäre Einheit).

Komplexe Zahlen lassen sich geometrisch darstellen. Dazu ist Pfeile (Vektor) in der Gaußschen Zahlenebene.

Geometrische Interpretation

Komplexe Zahlen lassen sich geometrisch darstellen. Dazu ist Pfeile (Vektor) in der Gaußschen Zahlenebene.

Im(z)

$z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = -1 + 2i$

$z_3 = -2 - 2i$

$z_4 = 3 - i$

$z_5 = 2i$

$z_6 = 4$

Kartesische Darstellung

$z = a + bi$

$a = \mathrm{Re}(z)$ Realteil

$b = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil

Man:

$z = 2 + 3i$

$w = -1 + 2i$

Addition: $z_1 + z_2$

$= (2 + 3i) + (-1 + 2i)$

$= 2 - 1 + 3i + 2i$

$= 1 + 5i$

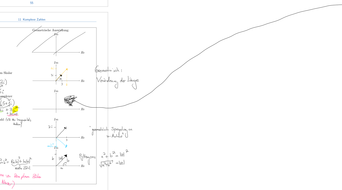
Geometrisch:

Pfeile (Vektor) werden aneinander gehängt

Aufgabe:

$x^2 = -1$

Gaußsche Zahlenebene



Multiplikation mit einem Skalar

$z = 2 + 3i$

$2 \cdot z = 2(2 + 3i)$

$= 4 + 6i$

Geometrisch: Verzerrung der Länge

Multiplikation mit komplexer Zahlen:

$z = (2 + 3i), (-1 + 2i)$

$z \cdot w = (2 + 3i) \cdot (-1 + 2i)$

$= -8 + 4i$ Gleich

Komplexe Zahlen Zahl: Gegenzahl

$z = 2 + 3i$

$-z = -2 - 3i$

Gegenzahl: $z + (-z) = 0$

Komplexe Zahlen: Kehrzahl

$z = 2 + 3i$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i}$

Gegenzahl: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

Division einer komplexen Zahl

$z = 2 + 3i$

$w = -1 + 2i$

$\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i}$

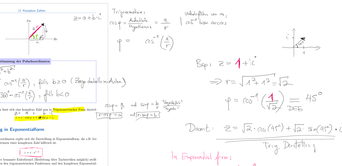
$= \frac{-2-4i-3i+6i^2}{1^2-(2i)^2}$

$= \frac{-8-7i}{5}$

Für Division ist der Nenner reell (Ohne i)

11.2 Trigonometrische Darstellung

Ein Zeiger lässt sich auch eindeutig über diesen Winkel φ und seine Weite r, der Zeiger auf der x-Achse eindeutig beschreiben. Dies und die sogenannte Polarkoordinaten Form.



$z = 3 + 3i$

$r = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$= \sqrt{2} \cdot 3^2$

Trigonometrie:

$\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{r}$ | Ankathete an α, | $\cos^{-1}$ bzw. $\arccos$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$

$\sin\varphi = \frac{b}{r}$ $\quad$ ist $\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\sin^{-1}(\sin\varphi) = \sin^{-1}\left(\frac{b}{r}\right)$

Bsp: $z = 1 + i$

$\Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

Dann: $z = \sqrt{2} \cdot \cos(45°) + \sqrt{2} \cdot \sin(45°) \cdot i$

Trig. Darstellung

Bsp: $z_1 = 2e^{i \cdot 45°}$

$z_2 = 3e^{i \cdot 30°}$

$z_1 \cdot z_2 = 2e^{i \cdot 45°} \cdot 3e^{i \cdot 30°}$

$= (2 \cdot 3) \cdot e^{i(45° + 30°)}$

$= 6 \cdot e^{i \cdot 75°}$

Bsp: $z = 1 + i$

$z^5 = (\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°})^5$

$= (\sqrt{2})^5 \cdot e^{i \cdot 45° \cdot 5}$

$= (\sqrt{2})^5 \cdot e^{i \cdot 225°}$

Bsp: $z^5 = 5$

$(1 + i)$

$= (\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°})^5 \cdot (1 + i)$

oder

Binomische Lehrsatz anwenden?

viel Arbeit

Im Exponential form:

$z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°}$

Wobei dem Dabei:

- Multiplikation (Division) ist einfacher mit Form
- Potenzen eine Potenz zählt ist einfacher

Bsp: $2 \cdot 2 = 2^2$

$x \cdot x = x^2$

Bsp: z^5

Bsp: z^5

Bsp: $z^5