Lösungen Blatt 7

Samstag, 15. Februar 2025 17:46

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zu Komplexe Zahlen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Komplexen Zahlen $z_1 = \frac{1}{7} + 4i, z_2 = -3 - \frac{1}{6}i$ und $z_3 = -1 + 2i$. Stellen Sie die Zahlen

$$w_1 = \bar{z}_1 + 2z_2 - 3z_3, \quad w_2 = z_3\bar{z}_3{}^2 z_3, \quad w_3 = \frac{z_1}{\bar{z}_3}$$

in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

Aufgabe 2

Es sei $z = 3 + 0.5i$. Veranschaulichen Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Zahlen:

$$z_1 = iz, \quad z_2 = -z, \quad z_3 = z^2 i - 8(i-1).$$

$z_2 = -(3+0{,}5i) = -3-0{,}5i$

$z_1 = i\cdot(3+0{,}5i) = 3i + 0{,}5i^2_{(-1)} = -0{,}5 + 3i$

$z_3 = (3+0{,}5i)^2 \cdot i - 8i + 8$
$= (9 + 3i + \frac{1}{4}i^2)\cdot i - 8i + 8$
$= (\frac{35}{4} + 3i)\cdot i - 8i + 8 = \frac{35}{4}i - 3 - 8i + 8$
$= 5 + \frac{3}{4}i$

Aufgabe 3

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Trigonometrischer und Exponentialform dar:

$$z_1 = -\frac{1}{3}(1-i), \quad z_2 = -10, \quad z_3 = (1+i)^9.$$

siehe unten

Aufgabe 4

Berechnen Sie:

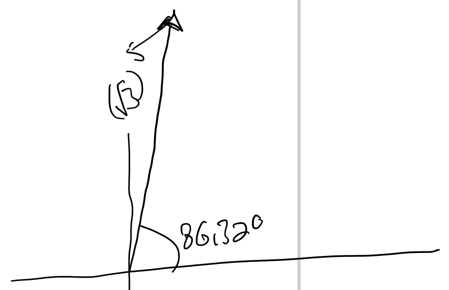
a) $(1-\sqrt{2}i)^5$

b) $\frac{2+6i}{3-5i}$

$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\varphi = 360° - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 305{,}26°$

Dann $(\sqrt{3}\cdot e^{i\cdot 305{,}26°})^5$
$= (\sqrt{3})^5 \cdot e^{i\cdot 1526{,}32°}$
$= (\sqrt{3})^5 \cdot e^{i\cdot 86{,}32°}$



2 Kartesische Koordinate

$z = a + b\cdot i$

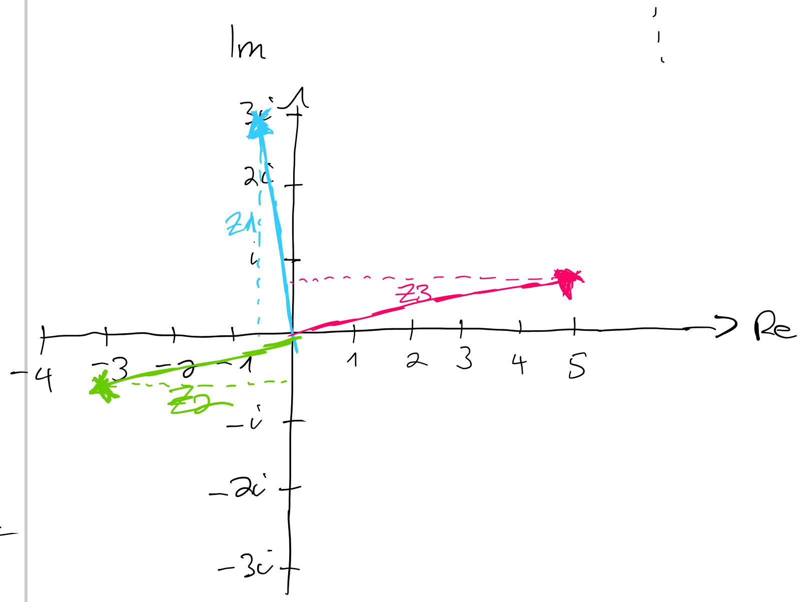
$z = (\sqrt{3})^5 \cos(86{,}32°) + (\sqrt{3})^5 \cdot \sin(86{,}32°)\cdot i$

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

$z^2 - 4z + 7 = 0 \quad | PQ$

$\Rightarrow z_{1,2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 7}$
$= 2 \pm \sqrt{4-7}$
$= 2 \pm \sqrt{-3}$
$= 2 \pm \sqrt{3\cdot i^2}$
$= 2 \pm \sqrt{3}\cdot i$ (konjugiert komplexes Lösungspaar)



① $w_1 = \frac{1}{7} - 4i + 2(-3 - \frac{1}{6}i) - 3(-1+2i)$
$= \frac{1}{7} - 4i - 6 - \frac{1}{3}i + 3 - 6i$
$= \frac{1}{7} - 3 - 10i - \frac{1}{3}i$
$= \frac{1}{7} - \frac{21}{7} - \frac{30}{3}i - \frac{1}{3}i = -\frac{20}{7} - \frac{31}{3}i$

(3. Binomische Formel: $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$
$(-1-2i)\cdot(-1+2i) = (-1)^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2_{(-1)} = 1 + 4 = 5$)

Realteil, Imaginärteil
$z_3 = -1 + 2i \Rightarrow \bar{z}_3 \cdot z_3 = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$
$\bar{z}_3 = -1 - 2i$

reelle Zahl!
$w_2 = \underbrace{\bar{z}_3 \cdot z_3} \cdot \bar{z}_3^{\,2}$
$= |z_3|^2 \cdot (-1 - 2i)^2$
$= \left(\sqrt{(-1)^2 + (2)^2}\right)^2 \cdot ((-1)^2 - 2\cdot(-1)\cdot(2i) + (2i)^2)$

2. Bin. Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= 5 \cdot (1 + 4i + 4i^2_{\cdot(-1)})$
$= 5\cdot(-3+4i)$
$= -15 + 20i$

$w_3 = \frac{\frac{1}{7} + 4i}{-1-2i} = \frac{(\frac{1}{7} + 4i)\cdot(-1+2i)}{(-1-2i)\cdot(-1+2i)} = \frac{-\frac{1}{7} + \frac{2}{7}i - 4i + 8i^2_{\cdot(-1)}}{(-1)^2 + (2)^2} = \frac{-\frac{1}{7} + \frac{2}{7}i - \frac{28}{7}i - \frac{56}{7}}{5}$
$= \frac{-\frac{57}{7} - \frac{26}{7}i}{5}$
$= -\frac{57}{35} - \frac{26}{35}i$

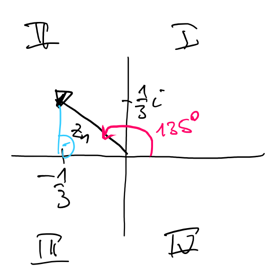
Trick!
Bruch mit konjugiert komplexen Nenner erweitern
$\Rightarrow$ Nenner wird reell

Aufgabe 3

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Trigonometrischer und Exponentialform dar:

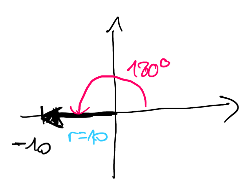
$$z_1 = -\frac{1}{3}(1-i), \quad z_2 = -10, \quad z_3 = (1+i)^9.$$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$

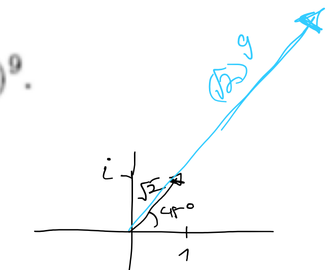


$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\cdot 135°}$

$r = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2}$
$= \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$



$z_2 = 10\, e^{i\cdot 180°}$



$z_3 = (\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°})^9$
$= (\sqrt{2})^9 \cdot e^{i\cdot 45°\cdot 9} = (\sqrt{2})^9 \cdot e^{i\, 405°}$ solange 360° subtrahieren, bis man $0 \le \varphi \le 360°$
$= (\sqrt{2})^9 \cdot e^{i\cdot 45°}$