18.02.2025

Samstag, 15. Februar 2025 17:46

# 13 Mengen und Ungleichungen

$A=\{3,4,5,6,7,8\}$, $B=\{-1,0,1,2,3,4\}$, $C=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

## 13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen

**Aufgabe 1**

Geben Sie an, welche Zahlen zu den folgenden Mengen gehören.

Natürliche Zahlen — Bedingung — ganze Zahlen — (Primzahl: Eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat: 1 und sich selbst)

(a) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 3\le x\le 8\}$

(b) $B=\{y\in\mathbb{Z}\mid -2<y\le 4\}$

(c) $C=\{z\in\mathbb{N}\mid z$ ist Teiler von $24\}$

(d) $D=\{x\in\mathbb{P}\mid x\le 40\}$ $=\{2,3,5,7,11,13,17,\dots 37\}$

(e) $E=\{z\in\mathbb{Z}\mid |z|<5\}$ $=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$|-3|=3$

**Aufgabe 2**

Geben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Bedingung an, welche die Elemente erfüllen müssen (vgl. Aufgabe 1).

(a) $A=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(b) $B=\{5,6,7,8,\dots\}$

(c) $C=\{3,6,9,12,15,\dots\}$

(d) $D=\{5,7,11,13,17,19\}$

(e) $E=\{4,5\}$

(f) $F=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -1\le x\le 8\}$

$B=\{x\in\mathbb{N}\mid x\ge 5\}$

$C=\{x\in\mathbb{N}\mid x$ ist ein Vielfaches von $3\}$

$D=\{x\in\mathbb{P}\mid 5\le x\le 19\}$

$E=\{x\in\mathbb{N}\mid 4\le x\le 5\}$

$F=\{x\in\mathbb{Z}\mid -3\le x\le 3\}$

ODER

$F=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 3\}$

Schnittmenge ≙ Logisch UND

- $A\cap B=\{5,6,7,8\}$ "UND"
- $A\cup B=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,\dots\}$ "ODER" Vereinigungsmenge
- $A\setminus B=\{-1,0,1,2,3,4\}$ "ohne"

**Aufgabe 3**

Berechnen Sie...

$A\cup B$, $B\cap C$, $C\setminus D$, $D\setminus C$, $D\cup E$ und $E\cap F$

~~(a) mit den Mengen von Aufgabe 1!~~ (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

③ $B\cap C=\{6,9,12,15,\dots\}$

$C\setminus D=C$

$D\setminus C=D$

$D\cup E=\{4,5,7,11,13,17,19\}$

$E\cap F=\{\,\}$ leere Menge

**Aufgabe 4**

Geben Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.

$A\cup B$, $B\cap C$, $C\setminus D$, $D\setminus C$, $D\cup E$ und $E\cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe 1! (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

$x\in\mathbb{N}$ mit $3\le x\le 8$

$x\in\mathbb{N}$ mit $x\in[3;8]$ abgeschlossenes Intervall

Element von

vs

$x\in\mathbb{N}$ mit $3<x<8$

" " $x\in(3;8)$ offenes Intervall (Ränder nicht zugehörig)

$]3;8[$





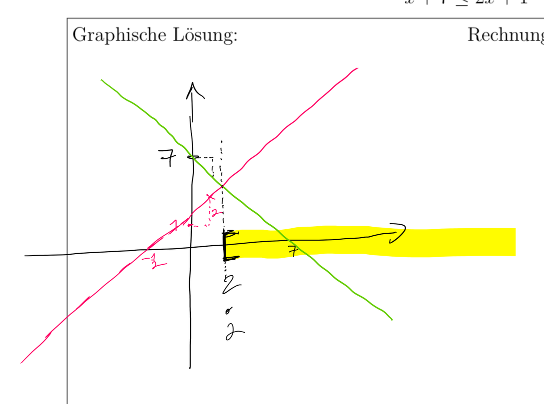
## 13.2 Ungleichungen

Graph ≤ Graph

Beispiel:

$$\underbrace{-x+7}_{f(x)}\le\underbrace{2x+1}_{g(x)}$$

Graphische Lösung:



Rechnung:

$-x+7\le 2x+1 \quad |-2x \quad |-7$

$-3x\le -6 \quad |:(-3)$ !

$x\ge 2$

Lösungsmenge

**Merke:**

Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Relationszeichen um!!!





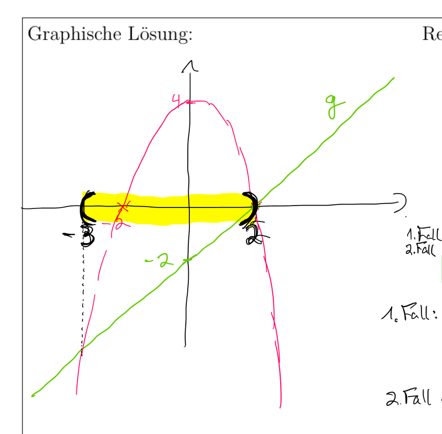
**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung.

$$\underbrace{-x^2+4}_{f(x)}>\underbrace{x-2}_{g(x)}$$

Tipp: Stellen Sie die Ungleichung so um, dass eine Seite null wird. Bestimmen Sie dann die Linearfaktorzerlegung und fürhen damit eine Fallunterscheidung durch.

Graphische Lösung:



Rechnung:

$-x^2+4>x-2 \quad |-x \quad |+2$

$-x^2-x+6>0 \quad |:(-1)$ !

$x^2+x-6<0$

NS: $x^2+x-6=0$ ⇒ $x_1=-3$ oder $x_2=2$

$(x+3)\cdot(x-2)<0$

1. Fall: + −
2. Fall: − +

Fallunterscheidung: Schnittmenge ∩

1. Fall: $x+3>0$ und $x-2<0$
   $x>-3$ und $x<2$ ⇒ $\mathbb{L}_1$: $-3<x<2$

2. Fall: $x+3<0$ und $x-2>0$
   $x<-3$ und $x>2$ ⚡ ⇒ $\mathbb{L}_2$: $\emptyset$ leere Menge

Gesamtlösung

$\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2=\mathbb{L}_1$: $-3<x<2$





## 13.3 Betragsungleichungen

Wiederholung:

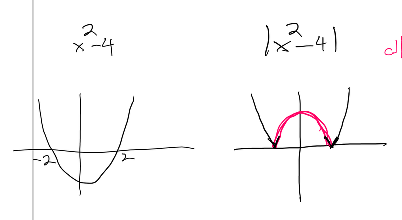
$$f(x)=|x|:=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

Bsp: $|4|=\underline{\underline{4}}$

$|-4|=-(-4)=\underline{\underline{4}}$

**Merke:**

Bei der rechnerischen Lösung kann folgender Zusammenhang hilfreich sein: $|x|^2=x^2$



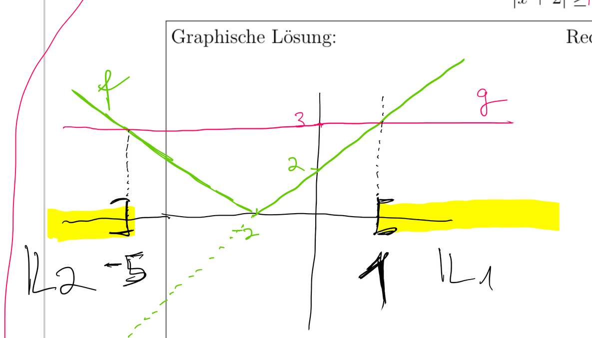


alles unterhalb der x-Achse wird an der x-Achse gespiegelt !

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$$\underbrace{|x+2|}_{f(x)}\ge\underbrace{3}_{g(x)}$$

Graphische Lösung:



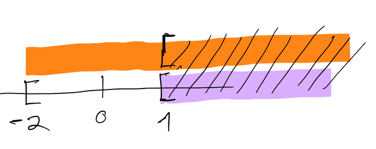
$\mathbb{L}_2$ −5 1 $\mathbb{L}_1$

Rechnung: mittels Fallunterscheidung:

1. Fall: $x+2\ge 0 \quad |-2$
   $x\ge -2$
   dann (können Betragsstriche weggelassen werden)
   $x+2\ge 3 \quad |-2$
   $x\ge 1$

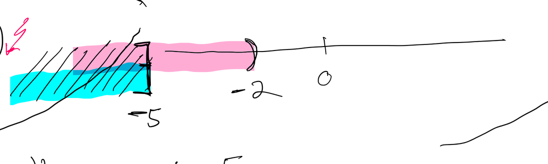
2. Fall: $x+2<0$ (Inneres des Betrags ist negativ)
   $x<-2$
   dann $-$(Inhalt im Betrag)
   $-(x+2)\ge 3 \quad |:(-1)$ ⚡
   $x+2\le -3 \quad |-2$
   $x\le -5$

Schnittmenge ∩



$\mathbb{L}_1=x\ge 1$

Schnittmenge ∩



$\mathbb{L}_2=x\le -5$

Vereinigung: ∪

$\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2$

$\mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -5 \text{ oder } x\ge 1\}$

Rechnung



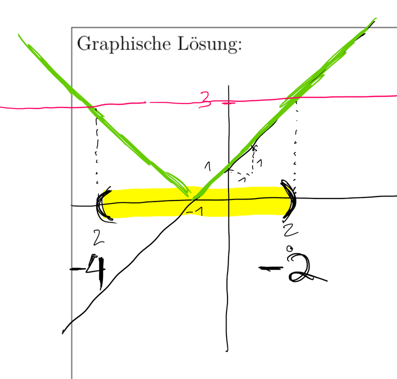


**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$$|x+1|<3$$

Graphische Lösung:

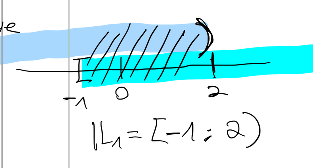


Rechnung:

1. Fall: $x+1\ge 0$
   $x\ge -1$
   dann $x+1<3$
   $x<2$

2. Fall: $x+1<0$
   $x<-1$
   dann $-(x+1)<3 \quad |:(-1)$
   $x+1>-3$
   $x>-4$

Schnittmenge



$\mathbb{L}_1=[-1;2)$

Schnittmenge

$\mathbb{L}_2=(-4;-1)$

$\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2$

$=(-4;2)$

Rechnung

verwende $|x|^2=x^2$

gegeben: $|x+1|<3 \quad |\,^2$

$|x+1|^2<9$

$(x+1)^2<9 \quad |\sqrt{\ }$ ! 2 Lösungen ±

$x+1<\pm 3$

! $x+1>-3$ oder $x+1<3$

$x>-4$ oder $x<2$



# 14 Regel von de L'Hospital

**Merke:**

Liegt bei einer Grenwertbestimmung ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ vor, darf man Zähler und Nenner getrennt Ableiten und den Grenzwert danach neu bestimmen. Ggf. kann dies mehrfach erfolgen.

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{1}=\underline{\underline{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{2x^2+6x}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+6}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{2x-2}=\frac{6}{4}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2x-e^{-x}}{x-\sin(x)}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2+e^{-x}}{1-\cos(x)}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)}=\frac{2}{1}=\underline{\underline{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to -2}\frac{3}{3x^2}=\frac{3}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$

$e^{-2x}=\frac{1}{e^{2x}}$

Trick:

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-2x}$ $\infty\cdot 0$ $\underset{\text{Umformen}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$ $\frac{"\infty"}{"\infty"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}$ $\frac{"\infty"}{"\infty"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}$ $\frac{1}{"\infty"}=\underline{\underline{0}}$

als e-Fkt schreiben !

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\cos(x))\frac{1}{x^2}}$ $\underset{3.\text{Log-Gesetz}}{=}\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos(x))}$ $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}}$ $\frac{"0"}{"0"}$

$\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))}{2x}}$ $\frac{"0"}{"0"}$ $\underset{L.H.}{=}\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{-\frac{-\cos(x)\cdot\cos(x)-(-\sin(x))\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}}{2}}$

$u'\cdot v-u\cdot v'$

$=e^{-\frac{1}{2}}$