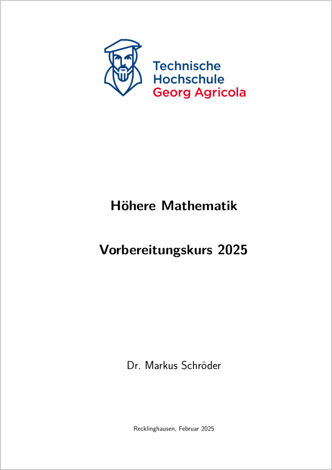
Mitschrift 11.08.2025

Samstag, 8. Februar 2025 21:59



Technische
Hochschule
Georg Agricola

Höhere Mathematik

Vorbereitungskurs 2025

Dr. Markus Schröder

Recklinghausen, Februar 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) 1
- 1.1 Lineare Funktionen . . . 1
  - 1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g . . . 3
- 1.2 Quadratische Funktionen . . . 3
- 1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades . . . 4

2 Gebrochen-rationale Funktionen 9

3 Folgen und Grenzwerte 11
- 3.1 Folgen . . . 11
- 3.2 Grenzwerte von Funktionen . . . 12
- 3.3 Stetigkeit . . . 15

4 Differentialrechnung Teil 1 19
- 4.1 Differenzenquotient . . . 19
- 4.2 Ableitungsregeln . . . 24

5 Differentialrechnung Teil 2 26
- 5.1 Graphisches Ableiten . . . 26
- 5.2 Berechnung von Extrema . . . 27
- 5.3 Berechnung der Wendepunkte . . . 28

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln 29
- 6.1 Die e-Funktion . . . 29
- 6.2 Die ln-Funktion . . . 32
  - 6.2.1 Ableitung der Umkehrfunktion . . . 32
  - 6.2.2 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen . . . 33
- 6.3 Quotientenregel . . . 34

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen 35
- 7.1 Die $sin(x)$-Funktion . . . 35

8 Steckbriefaufgaben und Lineare Gleichungssysteme 38
- 8.1 Synthese aus gegebenen Punkten . . . 38
- 8.2 Lineare Gleichungssysteme . . . 39
  - 8.2.1 Gauß-Verfahren . . . 39
  - 8.2.2 Überbestimmte LGS . . . 43

9 Summen und Reihen 44
- 9.1 Gauß'sche Summenformel . . . 44
  - 9.1.1 Vollständige Induktion . . . 44
- 9.2 Lineare Regression . . . 45
- 9.3 Wichtige Reihen . . . 46

10 Integralrechnung und ihre Anwendungen 48
10.1 Unbestimmte Integrale . . . 48
10.2 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte . . . 49
10.3 Partielle Integration . . . 52
10.4 Integration mittels Substitution . . . 53
10.5 Partialbruchzerlegung . . . 53

11 Komplexe Zahlen 55
11.1 Kartesische Darstellung . . . 55
11.2 Trigonometrische Darstellung . . . 56
11.3 Darstellung in Exponentialform . . . 57

12 Vektorrechnung 58
12.1 Grundlagen . . . 58
12.2 Übungen . . . 60
12.3 Betrag eines Vektors . . . 61
12.4 Skalarprodukt, Vektorprodukt . . . 62
12.5 Übungen . . . 64

13 Mengen und Ungleichungen 65
13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen . . . 65
13.2 Ungleichungen . . . 66
13.3 Betragsungleichungen . . . 68

14 Regel von de L'Hospital 70

Literatur 71

---

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1.1 Lineare Funktionen

nur x^1 als Erkennungsmerkmal

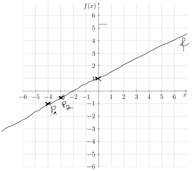
Der Graph einer Linearen Funktion ist immer eine Gerade.
Es folgt eine Analyse einer Linearen Funktion an einem Beispiel, mit der Ziel, anhand bestimmter charakteristischer Eigenschaften den Graph zu skizzieren:
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Variable x

Funktionswert ≙ y-Koordinate

x	$f(x)$	Punkte
-4	$f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)+1 = -2+1 = \underline{\underline{-1}}$	$P_1(-4\|-1)$
-3	$f(-3) = \frac{1}{2}\cdot(-3)+1 = -1{,}5+1 = -0{,}5$	$P_2(-3\|-0{,}5)$
-2	$f(-2) =$ $\vdots$	
-1	$f(-1) =$	
0	$f(0) = \frac{1}{2}\cdot 0+1 = 1$	$P_5(0\|1)$
1	$f(1) =$	
2	$f(2) =$	

Die Menge aller Punkte lässt sich als Graph in einem Koordinatensystem darstellen:



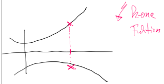
Bsp: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$

$\downarrow$

$x \cdot x \cdot x + 2 \cdot x \cdot x + 4$

Definition 1.1: Funktion

Eine Funktion ordnet jedem x aus dem Definitionsbereich (die Zahlen, die man für x einsetzen darf) eindeutig einen Funktionswert $f(x)$ (die y-Koordinate) aus dem Wertebereich (Menge aller Funktionswerte) zu.



Den Graph einer Linearen Funktion kann man auch direkt mittels der im Funktionsterm vorhandenen Koeffizienten skizzieren:

allg: $f(x) = m \cdot x + b$

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{2}}x \boxed{+1}$$

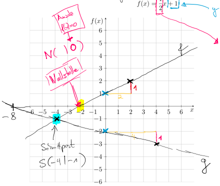
y-Achsenabschnitt (Schnittstelle mit y-Achse)

Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

in y-Richtung

in x-Richtung



Skizze von $g(x) = -\frac{1}{4}x \boxed{-2}$

$$m = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$$

Nullstellenbestimmung:

Ansatz: $\boxed{f(x) = 0}$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad |-1$$
$$\frac{1}{2} \cdot x = -1 \quad |:\frac{1}{2} \hat{=} \cdot \frac{2}{1}$$
$$x = -1 \cdot \frac{2}{1} = \underline{\underline{-2}}$$

$\boxed{g(x) = 0}$

$$-\frac{1}{4}x - 2 = 0 \quad |+2$$
$$-\frac{1}{4}x = 2 \quad |:-\frac{1}{4}$$
$$x = 2 \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) = -\frac{8}{1} = \underline{\underline{-8}}$$

Das „Gegenteil" zur Analyse ist die Synthese eines Funktionsterms aus gegebenen Daten: Gesucht ist eine Lineare Funktion g, die durch die Punkte $P(\underset{x_1}{4} \,|\, \underset{y_1}{-3})$ und $Q(\underset{x_2}{-8} \,|\, \underset{y_2}{0})$ verläuft.

$$g(x) = m \cdot x + b$$

Bestimmung von m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-3)}{-8 - 4} = \frac{3}{-12} \overset{=}{_3} \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

Bestimmung von b:

$$g(x) = -\frac{1}{4} \cdot x + b \qquad | \text{ P oder Q einsetzen,}$$

$P(\underset{x}{4} \,|\, \underset{g(x)}{-3})$

$$-3 = -\frac{1}{4} \cdot 4 + b$$
$$-3 = -1 + b \quad |+1$$
$$-2 = b$$

Somit ist $\boxed{g(x) = -\frac{1}{4}x - 2}$ Skizzieren in KO

1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g

Allgemeiner Ansatz: $\boxed{f(x) = g(x)}$

$$\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{4}x - 2 \quad \begin{array}{l} |-1 \\ |+\frac{1}{4}x \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 2\cdot \\ 2\cdot \end{array}\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \underbrace{-2 - 1}$$
$$\frac{2}{4}x + \frac{1}{4}x = -3$$
$$\frac{3}{4} \cdot x = -3 \quad |:\frac{3}{4}$$
$$x = -\cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = \underline{\underline{-4}}$$

in f oder g einsetzen

$$f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$S(-4 \,|\, -1)$$

1.2 Quadratische Funktionen

∩ "Bogen"

Der Graph einer Quadratischen Funktion ist immer eine Parabel ∪ .
Beispiel 1: Analyse von

$$f(x) = \boxed{2}x^2 + 4x \boxed{-6}$$

y-Schnitt

$f(x) = ax^2$

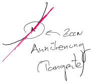
- Öffnung
  - a positiv ∪
  - a negativ ∩

$\boxed{0 < |a| < 1}$ $\boxed{|a| > 1}$

- Stauchung / Streckung in y-Richtung

$|-4| = 4$

Betrag von −4



Normalparabel: $a = 1$, $f(x) \hat{=} x^2$

Die Erstellung einer qualitativen Skizze des Graphen von f ist noch nicht möglich. Daher werden im Folgenden die sog. **Nullstellen** der Funktion f berechnet. Die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist eines der wichtigsten Schritte für die Analyse und wird an vielen Stellen in der Analysis benötigt!

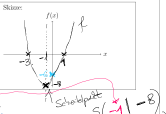
Definition 2.1: Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Hier gilt $f(x) = 0$.

Nullstellen:
Ansatz: $f(x) = 0$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad |:2$$
$$x^2 \underset{p}{+2}x \underset{q}{-3} = 0 \quad \text{erst jetzt PQ!}$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \boxed{-\frac{2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$$
$$= \boxed{-1} \pm \sqrt{1 + 3}$$
$$= -1 \pm \sqrt{4}$$
$$= -1 \pm 2$$
$$x_1 = -1 - 2 = \underline{\underline{-3}} \text{ oder } x_2 = -1 + 2 = \underline{\underline{1}}$$

Skizze:



$$S(\underset{-\frac{p}{2}}{-1} \,|\, -8)$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6$$
$$= 2 \cdot 1 - 4 - 6$$
$$= 2 - 4 - 6 = \underline{\underline{-8}}$$

Definition 2.2: PQ-Formel

Hat die quadratische Gleichung die Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$, dann ergeben sich die Nullstellen mittels PQ-Formel zu:

x-Wert vom Scheitelpunkt

$$x_{1,2} = \boxed{-\frac{p}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sind die Nullstellen einer quadratischen Funktion bekannt, kann man direkt den Scheitelpunkt S der Parabel angeben:

$$S(-\frac{p}{2} \mid f(-\frac{p}{2})).$$

Beispiel 2: Analyse von

nach oben geöffnet ∪

$$f(x) = \boxed{2}x^2 - 4x + 0$$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$2x^2 - 4x = 0$ (x ausklammern !)

$x \cdot (2 \cdot x - 4) = 0$

$x = 0$ oder

$2x - 4 = 0 \quad |+4$

$2x = 4 \quad |:2$

$x = 2$

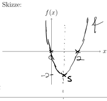
~~Scheitelpunkt:~~

$S(1 \mid -2)$

mittig der NS

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 2 - 4 = -2$

Skizze:



1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades

Der Grad eines Polynoms ist durch die höchste im Funktionsterm vorkommende Potenz festgelegt. Lösungen von Aufgabe 1 des ersten Übungsblatts:

$f(x) = \frac{1}{4}x \boxed{- 16}$

Nullstellen:

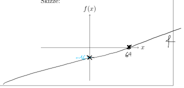
$f(x) = 0$

$\frac{1}{4}x - 16 = 0 \quad |+16$

$\frac{1}{4}x = 16 \quad |:\frac{1}{4}$

$x = 16 \cdot \frac{4}{1} = 64$

Skizze:



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \boxed{- \frac{9}{2}}$ $-4{,}5$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0 \quad |:(-\frac{1}{2})$

$x^2 + 3 \cdot (-\frac{2}{1})x - \frac{9}{2} \cdot (-\frac{2}{1}) = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad |PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{(\frac{-6}{2})^2 - 9}$

$= 3 \pm \sqrt{0}$

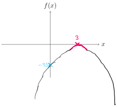
doppelte NS !

$\Rightarrow$ x-Achse wird nur berührt

~~Scheitelpunkt:~~

$x_{1,2} = 3$

Skizze:



Polynom 3. Grades

$f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$-2x^3 - 2x^2 + 12x = 0$

$x \cdot (-2x^2 - 2x + 12) = 0$

$x = 0$ oder

$-2x^2 - 2x + 12 = 0 \quad |:(-2)$

$x^2 + x - 6 = 0 \quad |PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$

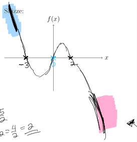
Randverhalten:

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{6}{2} = -3$ oder $x_2 = \frac{4}{2} = 2$

Skizze:



Merke:

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verlaufen an der Rändern immer gegen Unendlich!!!

betrachte $-2x^3$

linker Rand (von wo der Graph herkommt)

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$ von oben

(in Gedanken $x = -100$: $-2 \cdot (-100)^3 = -2 \cdot (-1000000) = +2000000$

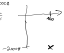
$\lim \triangleq$ Limes „Grenze"

rechter Rand (wo der Graph hinläuft im $+\infty$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$ geht nach unten

x gegen +Unendlich

(in Gedanken: z.B.: $x = 100 \Rightarrow -2 \cdot 100^3 = -2 \cdot 1000000 = -2000000$



$a \cdot x^n$

Erkennbar an der Potenz n und Vorfaktor a:

	x^2, x^4, x^6 n gerade	x^1, x^3, x^5, x^7 n ungerade
a pos	von $+\infty$ nach $+\infty$	von $-\infty$ nach $+\infty$
a neg	von $-\infty$ nach $-\infty$	von $+\infty$ nach $-\infty$

$f(x) = 2x^3 - 4x^2$

Nullstellen:

$2x^3 - 4x^2 = 0$

$x^2 \cdot (2x - 4) = 0$

$x^2 = 0$

$x \cdot x = 0$

$x = 0$ $x = 0$

$x = 0$ doppelte NS ! berührend !

oder

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$

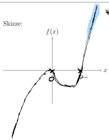
einfache NS schneidend

Randverhalten:

rechte Seite:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

Skizze:



Trick:

$f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

Nullstellen:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Substituiere $z = x^2$

$(z^2 = z \cdot z = x^2 \cdot x^2 = x^4)$

$\boxed{z^2 - 7z + 12 = 0}$ PQ ✓

$z_{1,2} = -\frac{(-7)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - \frac{12}{1}}$

$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}}$

$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$

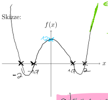
$z_1 = \frac{6}{2} = 3$ oder $z_2 = \frac{8}{2} = 4$

$x^2 = 3$ oder $x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{3}$ oder $x = \pm\sqrt{4}$

$\approx \pm 1{,}7$ $= \pm 2$

Skizze:



$\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

Randverhalten:

Symmetrie:

achsensymmetrisch (bzgl. y-Achse)

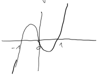
(bei Polynomen erkennbar, falls nur gerade Exponenten vorkommen)

vs.

punktsymmetrisch (bzgl. Ursprungs)

(nur ungerade Exponenten)

$f(x) = x^3 - x$



Linearfaktorzerlegung eines Polynoms

$f(x) = 2(x-3)(x+2)(x-1) = 2x^3 + \ldots\ldots\ldots + 12$

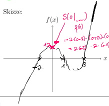
Linearfaktor zur NS x=1

Nullstellen:

↳ ablesbar ✓

$x = 3$ $x = -2$ $x = 1$

Skizze:



S(0|__)

f(0)

$= 2 \cdot (0-3) \cdot (0+2) \cdot (0-1)$

$= 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-1) = \underline{\underline{12}}$

$\lim_{x \to \infty} 2x^3 = +\infty$

Randverhalten:

Definition 3.1: Linearfaktorzerlegung

Die hier angegebene Darstellungsform wird als Linearfaktorzerlegung eines Polynoms bezeichnet und kann unter Kenntnis der Nullstellen einfach aufgestellt werden. Würde man die Linearfaktorzerlegung wieder „ausmultiplizieren“ und zusammenfassen, gelangt man zu der bereits bekannten allgemeinen Darstellungsform.

Die Linearfaktorzerlegungen für die vorigen Beispiele lauten:

Nullstellen:

$x=3$ doppelt — $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(x-3)\cdot(x-3) = -\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2$

$x=64$ — $f(x) = \frac{1}{4}x - 16 = \frac{1}{4}(x-64)$

$x=0, x=-3, x=2$ — $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x = -2(x-0)\cdot(x+3)\cdot(x-2)$

$x=0$ doppelt, $x=2$ — $f(x) = 2x^3 - 4x^2 = 2\,x \cdot x \cdot (x-2)$

$= 2x^2 \cdot (x-2)$

Weiterführendes Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Problem: Das Ausklammern von x ist hier nicht möglich!

Gleichungen dieser Art kann man mittels Polynomdivision oder Horner-Schema versuchen zu lösen. Dazu muss zunächst eine Nullstelle bekannt sein, die man durch Probieren herausfinden muss:

1. Schritt: Raten einer Nullstelle.
Tipp: Alle ganzzahligen Teiler der Konstanten 6, also ±1, ±2, ±3, ±6 könnten Kandidaten für Nullstellen sein.

rate $x=1$: $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 6$

$= 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ ✓

ist Nullstelle

2. Schritt: Durchführung der Polynomdivision
Da nun eine Nullstelle bekannt ist, kann man die Linearfaktorzerlegung zum Teil angeben:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (x-1) \cdot (\overset{x^2-x-6}{....?....}) \quad | : (x-1)$$

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = (....?....)$$

Polynomdivision:

$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6$ Restpolynom

$-(x^3 - 1x^2)$

$\quad -1x^2 - 5x$

$\quad -(-1x^2 + 1x)$

$\qquad -6x + 6$

$\qquad -(-6x + 6)$

$\qquad\quad 0$ ✓

⇓ PQ-Formel lösbar ✓

$x^2 - x - 6 = 0 \quad | PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6}$

$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\underline{\underline{x_1 = -2}}$ oder $\underline{\underline{x_2 = 3}}$

$144 : 3 = 48$

-12

$\quad 24$

-24

$\quad 0$ ✓

Insgesamt 3 NS:

$x = 1$, $\underline{\underline{x=-2}}$, $\underline{\underline{x=3}}$

(geraten)

Ziel der Polynomdivision ist letztlich die Reduzierung des Grades, so dass man auf das Restpolynom die bekannten Lösungsverfahren anwenden kann. Man kann die Polynomdivision „umgehen“, indem man das sogenannte Horner-Schema anwendet. Neben der schnellen Auswertung von Funktionswerten erhält man (beim Finden einer Nullstelle) direkt die Koeffizienten des Restpolynoms:
Horner-Schema:

Horner–Schema:
Eine effiziente Berechnungsmethode für Funktionswerte von Polynomen durch geeignete Klammerung:

$$P_n(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots)x + a_0$$

bzw. schematisch

a_k	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
$\times x^*$	$\downarrow$	xb_n	xb_{n-1}		$\ldots$	xb_1
Σ	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_1	$b_0 = P_n(x^*)$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen mittels Hornerschema:
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12$ Lösung: x=1,x=2,x=-6
b) $f(x) = x^3 - 7x - 6$ Lösung: x=-2,x=-1,x=3

$f(x) = 1x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

	x^3	x^2	x	c
Vorfaktoren	1	-2	-5	6
x-Wert der ausgewertet werden soll $x=1$		1	-1	-6
Das sind die Vorfaktoren des Restpolynoms bei der Polynomdivision Σ	1	Σ -1	Σ -6	Σ 0
Summe	x^2	x	c	

y-KO zu x=1
f(1)

$\Rightarrow 1x^2 - 1x - 6$

a) $(x^3 + 3x^2 - 16x + 12) : (x - 1) = x^2 + 4x - 12$

$-(x^3 - 1x^2)$
$+4x^2 - 16x$
$-(4x^2 - 4x)$
$-12x + 12$
$-(-12x + 12)$
0 ✓

↓ PQ

	x^3	x^2	x	c
	1	3	-16	12
$x=1$	0	1	4	-12
	1	4	-12	0
	x^2	x	c	

$1x^2 + 4x - 12$

b)

	x^3	x^2	x	const
	1	0	-7	-6
$x=-2$		-2	4	6
	1	-2	-3	0 ✓ ist NS

Restpolynom: $1x^2 - 2x - 3$

$(x^3 + 0x^2 - 7x - 6) : (x + 2) = x^2 - 2x - 3$

$-(x^3 + 2x^2)$
$-2x^2 - 7x$
$-(-2x^2 - 4x)$
$-3x - 6$
$-(-3x - 6)$
0

2 Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion f, deren Funktionsterm ein Bruch ist, wobei Zähler und Nenner jeweils Polynome sind, heißt gebrochen-rationale Funktion.
Ein einfaches Beispiel zu Beginn:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

Neu! Definitionsbereich:
NS des Nenners:
$x + 1 = 0 \quad |-1$
$\underline{\underline{x = -1}}$ Definitionslücke
reelle Zahlen ↓ ohne
$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nullstellen:
NS des Zählers:
$2x - 1 = 0$
$2x = 1$
$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

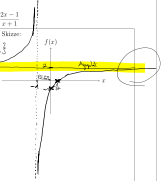
y-Achsenschnitt:
$f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 + 1} = \underline{\underline{-1}}$

Neu! Asymptote(Randverhalten):
⇓
selbst eine Funktion, an der sich der Graph im Unendlichen annähert, die sich durch Polynomdivision Zähler : Nenner ergibt:

$(2x - 1) : (x + 1) = 2 + \frac{-3}{(x+1)}$
$-(2x + 2)$
-3 Rest

⇑ Asymptote
$a(x) = 2$

Skizze:



Merke:

Das Randverhalten einer gebrochen-rationalen Funktion f wird durch die sogenannte Asymptote bestimmt. Die Asymptote ist selbst eine Funktion, dessen Funktionsterm sich durch den “ganzzahligen Anteil “der Polynomdivision von “Zähler : Nenner “ergibt. Der Graph von f nähert sich im Unendlichen immer mehr dem Graph der Asymptote, zuvor kann der Graph von f die Asymptote auch schneiden oder berühren.

Ein ausführlicheres Beispiel zum Schluss:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^2 - x - 6} = \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)} \cdot (x-3)}$$

Linearfaktorzerlegung von Zähler und Nenner

$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) \cdot (-2-1)}{-2-3} = \frac{-4 \cdot (-3)}{-5} = \frac{12}{-5} = \underline{\underline{-2{,}4}}$

x=3 ist eine Polstelle
x=-2 hebbare Definitionslücken
⇒ "Loch im Graph"

Neu! Definitionsbereich:
NS von Nenner: $x^2 - x - 6 = 0 \quad |PQ$
$\Rightarrow x = -2, x = 3$
$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

Nullstellen:
NS von Zähler: $2x^3 + 2x^2 - 4x = 0$
$x \cdot (2x^2 + 2x - 4) = 0$
$x = 0$
$x^2 + x - 2 = 0 \quad |PQ$
$x = 1, x = -2$

y-Achsenschnitt:

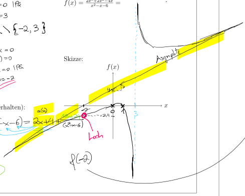
Neu! Asymptote(Randverhalten):

$(2x^3 + 2x^2 - 4x) : (x^2 - x - 6) = 2x + 4 + \frac{12x + 24}{(x^2 - x - 6)}$
$-(2x^3 - 2x^2 - 12x)$
$4x^2 + 8x$
$-(4x^2 - 4x - 24)$
$12x + 24$ Rest

a(x)

Neu! Ersatzfunktion, Art der Definitionslücke:
$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^2 - x - 6} =$

Skizze:



Merke:

Erstellt man für Zähler und Nenner jeweils die Linearfaktorzerlegung, kann man daraus wichtige Eigenschaften der Funktion f erkennen:

1. Es liegt eine Nullstelle vor, wenn nur das Zählerpolynom diese Nullstelle hat. Haben Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen, muss man deren Vielfachheit betrachten.
2. Ist die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners kleiner oder gleich der des Zählers, liegt eine hebbare Definitionslücke vor. Dort hat der Graph ein ”Loch”, der fehlende Funktionswert kann durch den Funktionswert der gekürzten Linearfaktorzerlegung (der sog. Ersatzfunktion f^*) behoben werden.
3. Ansonsten liegt eine Polstelle (im Prinzip eine senkrechte Asymptote) vor, bei diesen Definitionslücken laufen die Funktionswerte gegen unendlich, wenn man sich ihnen von links oder rechts nähert (ein sog. Unendlichkeitsstelle). In der Ersatzfunktion f^* gilt, bei gerader Vielfachheit der Nennernullstelle liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (Annäherung auf beiden Seiten entweder gegen $+\infty$ oder $-\infty$), bei ungerader Vielfachheit liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor (auf der einen Seite gegen $+\infty$ und auf der anderen gegen $-\infty$ bzw. umgekehrt).