Mitschrift 13.08.2025

Samstag, 8. Februar 2025 22:09

5 Differentialrechnung Teil 2

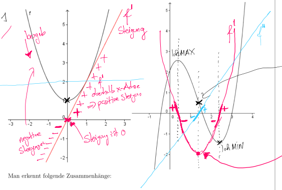
5.1 Graphisches Ableiten

Im Folgenden sollen Zusammenhänge zwischen dem Graph einer Funktion und dem Graph deren Ableitung identifiziert werden.

$f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$



Wendepunkt

- ändert sich die Krümmung des Graphen von rechts/links bzw. andersherum ("Straßenverlauf von oben betrachtet")
- Steigung ist extremal, dh. am größten bzw. am kleinsten, hier geht es am steilsten berghoch bzw. bergab ❗

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

f hat	f' hat	f'' hat
ein Minimum	schneidende NS von −/+	$f''>0$, hat einen positiven Wert (f' geht bergauf)
ein Maximum	" " von +/−	$f''<0$, hat einen negativen Wert (f' geht bergab)
einen Wendepunkt	ein Minimum/Maximum	schneidende NS von −/+ " " " +/−
einen Sattelpunkt	eine berührende NS	" "

5.2 Berechnung von Extrema (Hoch- bzw. Tiefpunkte)

Maximum Minimum

Die zuvor festgestellten Zusammenhänge werden nun für die Berechnung von Extrema verwendet, am Beispiel von:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

① **Notwendige Bedingung:**

Steigung

$$f'(x) = 0$$

(Nullstellen von f')

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad | : 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad | \text{PQ}$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{1}$

$= 2 \pm 1$

② **Hinreichende Bedingung:** $\underline{x_1 = 1}$ oder $\underline{\underline{x_2 = 3}}$ (x-KO von möglichen Hoch- bzw. Tiefpunkten ❗)

zu prüfen, ob ein MAX/MIN oder garnichts vorliegt

1. Möglichkeit mittels Vorzeichenwechselkriterium von f'

(geht immer)

untersuche $x_1 = 1$:
Steigung davor: $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9$, positive Steigung
Steigung dahinter: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$, negative Steigung $\Rightarrow$ MAXIMUM ∩
$12 - 24 + 9$

untersuche $x_2 = 3$:
Steigung davor: $f'(2) = -3$, negative Steigung
Steigung dahinter: $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9$, pos. Steigung $\Rightarrow$ MINIMUM ∪
$48 - 48 + 9$

2. Möglichkeit unter Verwendung der 2. Ableitung: $f''(x) = 6x - 12$

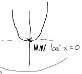
(falls Ergebnis 0, keine Aussage möglich)

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) \neq 0$$

untersuche $x_1 = 1$: $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ MAX

untersuche $x_2 = 3$: $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ MIN

Gegenbeispiel: $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$



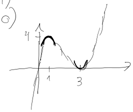
ϟ $f''(0) = 0$

③ **Berechnung der y-Koordinate:**

(in die Ausgangsfunktion einsetzen)

$x_1 = 1$: $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$, also MAX(1|4)

$x_2 = 3$: $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$, also MIN(3|0)
$27 - 54 + 27$



5.3 Berechnung der Wendepunkte

① **Notwendige Bedingung:**

$$f''(x) = 0$$

$$6x-12=0$$
$$6x=12$$
$$\underline{\underline{x=2}}$$

② **Hinreichende Bedingung:**

$$f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0$$

$$f'''(2)=6\neq 0 \quad ✓$$

③ **Berechnung der y-Koordinate:**

$$f(2)=2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2$$
$$8-24+18 \quad =2$$

damit $WP(2 \mid 2)$

---

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

$$f(x)=2^x$$

Exponent

Basis

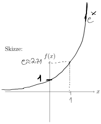
6.1 Die e-Funktion

$$f(x)=e^x$$

Die e-Funktion ist eine Exponentialfunktion mit Basis $e \approx$ 2,71…. , der sog. Euler'schen Zahl, benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler….

Abbildung 6.1: Leonhard Euler [11], 1707-1783

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der e-Funktion sind:

D= $\mathbb{R}$

W= $\mathbb{R}_{>0}$ nur positive y-KO (Funktionswerte)

⟹ immer oberhalb der x-Achse (keine NS)

$f'(x) = e^x$

Merke:

Für die Ableitung der e-Funktion gilt:
Die e-Funktion bleibt unverändert, davor schreibt man die Ableitung des Exponenten als Faktor (siehe Kettenregel).

z.B.:

$$f(x)=e^{5x}$$
$$f'(x)=5\cdot e^{5x}$$

Beispiele:

$f(x) = e^{2x}$ $f'(x) = 2\cdot e^{2x}$	$f(x) = e^{3x+1}$ $f'(x) = 3\cdot e^{3x+1}$	$f(x) = e^{x^2}$ $f'(x) = 2x\cdot e^{x^2}$
$f(x) = e^{-x}$ $f'(x) = -e^{-x}$	$f(x) = e^{2x} + x^2 + 4x$ $f'(x) = 2e^{2x}+2x+4$	$f(x) = x^2 + e^x$ $f'(x) = 2x+e^x$

Produktregel (wenn in beiden Faktoren die Variable vorkommt)

$$f(x) = \overset{u}{x^2} \cdot \overset{v}{e^x}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2x}\cdot \underset{v}{e^x} + \underset{u}{x^2}\cdot \underset{v'}{e^x} \qquad | e^x \text{ ausklammern}$$
$$\underline{\underline{=e^x\cdot(2x+x^2)}}$$

⟹ hiermit kann man nun weiterrechnen!

Extrema:

① N.B.: $f'(x)=0$

$$e^x\cdot(2x+x^2)=0$$

$e^x=0$ oder $2x+x^2=0$

k.L.

⋮

Ein Produkt von zwei Funktionstermen kann nicht einfach einzelnd, wie bei einer Summe, abgeleitet werden:

$$f(x) = x^2 + e^{4x} \qquad f(x) = \overset{}{\underset{u}{x^2}} \cdot \underset{v}{e^{4x}} \; ?$$

Definition 1.1: Produktregel

Die Funktionen u und v seien im gemeinsamen Definitionsbereich überall differenzierbar. Dann gilt:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Beispiele:

$$f(x) = \overset{u}{e^{2x}} \cdot \overset{v}{4x}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2e^{2x}} \cdot \underset{v}{4x} + \underset{u}{e^{2x}} \cdot \underset{v'}{4}$$
$$= e^{2x} \cdot (8x + 4)$$

$$f(x) = \overset{u}{x^2} \cdot \overset{v}{e^{-x}}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2x} \cdot \underset{v}{e^{-x}} + \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v'}{(-e^{-x})}$$
$$= e^{-x} \cdot (2x - x^2)$$

$$f(x) = \overbrace{(x^2 - 2x)}^{u} \cdot \overbrace{e^{\frac{1}{2}x}}^{v}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{(2x-2)} \cdot \underset{v}{e^{\frac{1}{2}x}} + \underset{u}{(x^2-2x)} \cdot \underset{v'}{\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}\left((2x-2) + (x^2-2x) \cdot \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(2x - 2 + \tfrac{1}{2}x^2 - x\right)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x - 2\right)$$

$$f(x) = \overbrace{e^{2x+1}}^{u} \cdot \overbrace{(x-3)}^{v}$$
$$f'(x) = \underset{u'}{2e^{2x+1}} \cdot \underset{v}{(x-3)} + \underset{u}{e^{2x+1}} \cdot \underset{v'}{(1)}$$
$$= e^{2x+1}\left(2 \cdot (x-3) + 1\right)$$
$$= e^{2x+1} \cdot (2x - 6 + 1)$$
$$= e^{2x+1} \cdot (2x - 5)$$

Beispiele:

$f(x) = e^{2x} \cdot 4x$
$f'(x) =$

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
$f'(x) =$

$f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
$f'(x) =$

$f(x) = e^{2x+1} \cdot (x - 3)$
$f'(x) =$

Damit man mit der ersten Ableitung weiter rechnen kann (um beispielsweise Extrema zu bestimmen), klammert man den e-Term aus.

Übung: Klammern Sie in den Ableitungen aus obiger Übung jeweils den e-Term aus.

Exkurs: Gewinnung der Euler'schen Zahl aus der Tangente an der Stelle $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Wie ist die Basis a zu wählen, damit dieser Grenzwert 1 ergibt? Zunächst wird der Grenzwert anders notiert, indem h durch $\frac{1}{n}$ ersetzt wird.

Potenzgesetz
$$\boxed{a^{x+h} = a^x \cdot a^h}$$

Für eine allgemeine Exponentialfunktion mit Basis $a > 0$ gilt: $f(x) = a^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h}$$
$$= a^x \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}$$

müsste 1 sein, wenn die Ableitung wieder die Funktion selbst sein soll!

Idee!

2. Für welche Basis a ist dies der Fall

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \overset{!}{=} 1$$
$$\frac{a^h - 1}{h} = 1 \quad | \cdot h$$
$$a^h - 1 = h \quad | + 1$$
$$a^h = h + 1 \quad | \wedge \left(\tfrac{1}{h}\right)$$
$$\left(a^h\right)^{\frac{1}{h}} = (h+1)^{\frac{1}{h}}$$
$$a = (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

also $a = \lim_{h \to 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}$

für $h = 0{,}1 \Rightarrow a = 2{,}5937\ldots$
$h = 0{,}01 \Rightarrow a = 2{,}70489$
$h = 0{,}001 \Rightarrow a = 2{,}716923$
$h = 0{,}0001 \Rightarrow a = 2{,}718145$
$h = 0{,}00001 \Rightarrow a = 2{,}718268$

$a = e$ (Euler'sche) Zahl

also $e \approx \lim_{h \to 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}$

man findet dies oft in folgender Form, $\frac{1}{h} = n \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{n} = h}$

$$e \approx \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$$
$$\boxed{e \approx \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Definition über Grenzwert!

Lässt man nun $n \to \infty$ laufen, ergibt sich als gesuchte Basis und als mögliche Definition der Euler'schen Zahl e:

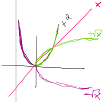
$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

6.2 Die ln-Funktion

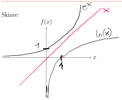
Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist eine sog. Logarithmusfunktion zur Basis e (natürlicher Logarithmus) und die Umkehrfunktion der e-Funktion.

Merke:

Die Umkehrfunktion entsteht graphisch, wenn man den monoton steigenden (bzw. fallenden) Bereich (nur hier ist eine Funktion umkehrbar, vgl. $f(x) = x^2$) an der Geraden $g(x) = x$ spiegelt. Rechnerisch erhält man diese durch Vertauschen von x und y und möglicher Umformung nach y.



Skizze:



Wichtige Eigenschaften der *ln*-Funktion sind:

D= $\mathbb{R}_{>0}$ nur positive Zahlen

W= $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = 2^x \quad f^{-1}(x) = \log_2 x$

$f(x) = 10^x \quad f^{-1}(x) = \log_{10} x \mathrel{\hat{=}} \lg x$

$f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \underline{\underline{\ln(x)}} \mathrel{\hat{=}} \log_e x$

6.2.1 Ableitung der Umkehrfunktion

Offensichtlich gilt
$$x = f(f^{-1}(x))$$

Ableiten unter Verwendung der Kettenregel liefert als Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

Merke:

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6.2.2 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen

Trick:

Falls die Variable im Exponenten und/oder in der Basis vorkommt, kann man die Funktion wie folgt als e-Funktion schreiben und dann ableiten:

$f(x) = (x)^{3x}$

Umschreiben als e-Funktion

$$f(x) = \left(\cancel{e}^{\cancel{\ln}(x)}\right)^{3x} \underset{\text{3. Log-Gesetz}}{=} e^{3x \cdot \ln(x)}$$

$\log u^v = v \cdot \log u$

$$\Downarrow f'$$

$$f'(x) = (\underset{u}{3x} \cdot \underset{v}{\ln(x)})' \cdot e^{3x \cdot \ln(x)}$$

Produktregel

$$= \left(\underset{u'}{3} \cdot \underset{v}{\ln(x)} + \underset{u}{\cancel{3x}} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{\cancel{x}}}\right) e^{3x \cdot \ln(x)}$$

$$= (3\ln(x) + 3) \cdot e^{3x \cdot \ln(x)}$$

$$= (3\ln(x) + 3) \cdot (x)^{3x}$$

6.3 Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich an der Stelle x differenzierbar und es gilt $v(x) \neq 0$, dann gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$f(x) = \frac{(2x+1)}{(x^2-4)}$ u v

$$f'(x) = \frac{\overset{u'}{2} \cdot \overset{v}{(x^2-4)} - \overset{u}{(2x+1)} \cdot \overset{v'}{2x}}{\underset{v^2}{(x^2-4)^2}} = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 - 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x - 8}{(x^2-4)^2}$$

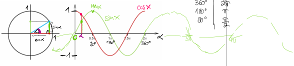
---

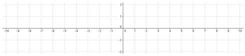
7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

7.1 Die $sin(x)$-Funktion

Die Sinusfunktion $\boxed{f(x) = sin(x)}$ ist eine sogenannte trigonometrische Funktion. Man erhält den Graphen, indem man abhängig von dem Winkel x, der auf der x-Achse abgetragen wird, die Länge der Gegenkathete des Winkels x im Einheitskreis, also den $sin(x)$, als y-Wert einträgt (vgl. Animation auf Wikipedia [13]):

Gradmaß	Bogenmaß
360°	2π
180°	π
90°	$\frac{\pi}{2}$





Eigenschaften der Sinus-Funktion:

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x_n = n \cdot \pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$

ganzen Zahlen

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Wertebereich: $W = [-1 ; 1]$

Extremstellen: $x_E = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

y-Achsenschnitt: $S_y(0|0)$

Wendestellen: siehe NS

Symmetrie: punktsymmetrisch

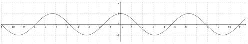
Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x) = \cos(x)$

Definition 1.1: Ableitungskreislauf für Sinus/Cosinus

Es gilt:

$$\begin{tikzcd}
\sin(x) \arrow[d] \\
\cos(x) \arrow[d] \\
-\sin(x) \arrow[d] \\
-\cos(x) \arrow[uuu, bend left=60]
\end{tikzcd}$$

Eigenschaften der Kosinusfunktion:



Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Wertebereich: $W = [-1 : 1]$

Extremstellen: $x_E = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

y-Achsenschnitt: $S_y(0|1)$

Wendestellen: siehe NS

Symmetrie: achsensymmetrisch

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = 10 \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 10 \cdot \cos(x)$

$f(x) = \overset{u}{e^x} \cdot \overset{v}{\sin(x)}$

$f'(x) = \underset{u' \cdot v}{e^x \cdot \sin(x)} + \underset{u \cdot v'}{e^x \cdot \cos(x)}$

$= e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$

~~$f(x) = \sin(x^2)$~~

~~$f'(x) =$~~

$\sin(x^2) \neq$

$f(x) = (\sin(x))^2$

$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$

$f(x) = \sin^2(x)$

$f'(x) = \underset{u' \cdot v}{\cos(x) \cdot \sin(x)} + \underset{u \cdot v'}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$

$= 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$

$f'(x) =$

$$f'(x) = \frac{\overset{u' \cdot v}{\cos(x) \cdot \cos(x)} - \overset{u \cdot v'}{\sin(x) \cdot (-\sin(x))}}{\underset{v^2}{(\cos(x))^2}} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

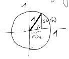
$$= \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$$

$$= 1 + (\tan(x))^2$$

Pythagoras am Einheitskreis

$1^2 = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$



Definition 1.2: Kettenregel

Mittels der Kettenregel lässt sich die Ableitung zweier miteinander verketteter, differenzierbarer Funktionen f und g bestimmen. Es gilt:

$$(f(g(x)))' = g(x)' \cdot f'(g(x))$$

Merke: Innere Ableitung · äußere Ableitung (mit innerer Funktion eingesetzt).

$$f(x) = (\underbrace{\boxed{\sin(x)}}_{\text{innere Fkt}})^{\overset{\text{äußere}}{2}}$$

$$f'(x) = \underbrace{\cos(x)}_{\text{innere Abl.}} \cdot 2 \cdot (\sin(x))^1$$

$= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ ✓

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

x^5

$f(x) = (\underbrace{\boxed{3x+1}}_{\text{innere Fkt}})^5$

$f'(x) = \underbrace{3}_{\text{innere Abl}} \cdot \underbrace{5 \cdot (3x+1)^4}_{\text{äußere Abl.}}$

$f(x) = e^{\overset{\text{innere Fkt}}{\boxed{x^2+2x}}}$

$f'(x) = \underbrace{(2x+2)}_{\text{innere Abl.}} \cdot \underbrace{e^{\boxed{x^2+2x}}}_{\text{äußere Abl.}}$

$$f(x) = \overset{\text{äußere Funktion}}{\sin}(\overset{\text{innere Fkt}}{\boxed{x^2}})$$

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{\cos(\boxed{x^2})}_{\text{äußere Abl. (mit innerer eingesetzt)}}$$