Blatt4-Uebungen_Differentialrechnung

Dienstag, 20. Februar 2024 21:36

Blatt4-Uebungen...

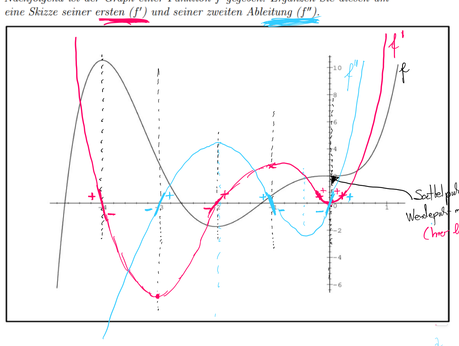
Dr. Markus Schröder

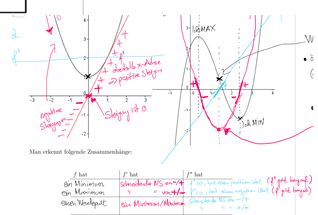
Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 1

Nachfolgend ist der Graph einer Funktion f gegeben. Ergänzen Sie diesen um eine Skizze seiner ersten (f') und seiner zweiten Ableitung (f'').





Man erkennt folgende Zusammenhänge:

f hat	f' hat	f'' hat
ein Minimum	Schnittstelle NS von f'	$f''(x_0)$ hat einen positiven Wert (f' geht bergauf)
ein Maximum	" " von f'	$f''(x_0)$ hat einen negativen Wert (f' geht bergab)
einen Wendepunkt	ein Minimum/Maximum	Schnittstelle NS von f''

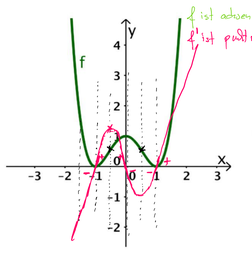
Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

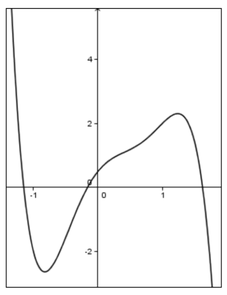
Aufgabe 2 Skizzieren Sie f'(x)

a)



Man erkennt folgende Zusammenhänge:

f hat	f' hat	f'' hat
ein Minimum	Schnittstelle NS von + / +	
ein Maximum	" " von + / +	
einen Wendepunkt	ein Minimum/Maximum	



Quelle: http://www.mathe-trainer.de/Klasse10/Ganzrationale%20Funktionen/grafisches%20ableiten/Block1/Aufg2/Aufg.htm

https://de.serlo.org/mathe/26407/aufgaben-zum-graphischen-differenzieren

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lage und Art der **Extremstellen** *der folgenden Funktionen f_1 und f_2. Bestimmen Sie weiterhin ihre* **Wendestellen** *(hierbei nur notwendige Bedingung).*

$$f_1(x) = x^4 - 8x^2 - 9\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3\,.$$

Zusatz:

Folgende Aufgaben sind **jeweils** *auszuführen:*

(i) *Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Linearfaktorzerlegung an.*

(ii) *Ermitteln Sie die Schnittstelle mit der y-Achse.*

(iii) *Untersuchen Sie die Funktion auf das Randverhalten.*

(iv) *Skizzieren Sie den Graph der Funktion in ein Koordinatensystem.*

Aufgabe 4

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 10t \cdot e^{-0.5t}$$

die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t.

(i) *Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist.*

(ii) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.*

Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear

(iii) *Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $P(6,\ f(6))$ beschrieben.*
Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist.

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 5

Ein Designer (Gestalter!) beschließt, seine (zylindrische) Hautcreme-Dose in einer Kugel zu verpacken. Diese soll den Radius $R = 5$ cm besitzen. Wie groß ist dann das maximale Volumen $\mathcal{V}$ des in der Kugel unterzubringenden Zylinders, überlegt er. Aus dem Mathematik-Unterricht von Herrn Fredebeul weiß er noch

$$\mathcal{V}_{Zylinder} = r^2\pi h\,,$$

und nach einigem Nachdenken erkennt er (Begründung??)

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = r^2 + \frac{h^2}{4}\,.$$

Helfen Sie ihm weiter. Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h des optimalen Zylinders. Wie groß ist sein Volumen $\mathcal{V}$? Passt eine Creme mit 300 ml hinein?

Aufgabe 6

a)

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, dessen Graph durch die Punkte $A(1\,|\,-32)$, $B(-2\,|\,4)$, $C(-3\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0)$ verläuft.

b)

Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: Sie hat im Punkt $(0,\,0)$ eine Extremstelle, in $x = 3$ eine Nullstelle und in $x = 1$ die Steigung -3.
Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung!

c) Bestimmen Sie den Term einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades, welche durch den Punkt P(0 |1) verläuft und an der Stelle x= 1 eine Nullstelle und ein Minimum besitzt.

Ableitungen: $f'(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2$

$f''(x) = 4x^3 + 18x^2 + 16x$

$f'''(x) = 12x^2 + 36x + 16$

Extrema:

① Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$x^4 + 6x^3 + 8x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 + 6x + 8) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x^2 + 6x + 8 = 0$

doppelte NS (beitreal) ⇒ Sattelpkt

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-8}$

$= -3 \pm 1$

$x_1 = -4$ oder $x_2 = -2$

einfache NS, schneidend

② Hinr. Bed.:

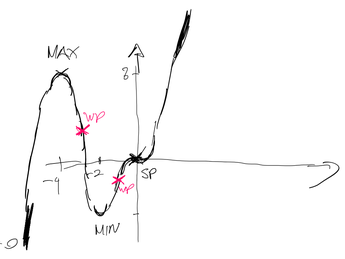
- $f''(0) = 0$ ⇒ keine Aussage möglich ⇒ ist der Sattelpkt. siehe ① bzw. Betrachtung der Wendepunkte
- $f''(-4) = 4 \cdot (-4)^3 + 18 \cdot (-4)^2 + 16 \cdot (-4) = -32 < 0$ ⇒ MAX
- $f''(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 18 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) = 8 > 0$ ⇒ MIN

③ y-Ko:

$f(0) = 0$ ⇒ SP(0|0)

$f(-4) = \frac{1}{5}(-4)^5 + \frac{3}{2}(-4)^4 + \frac{8}{3}(-4)^3 = 8{,}5\overline{3}$ ⇒ MAX $(-4|8{,}5\overline{3})$

$f(-2) = -3{,}7\overline{3}$ ⇒ MIN$(-2|-3{,}7\overline{3})$



Wendestellen:

① N.B.: $f''(x) = 0$

$4x^3 + 18x^2 + 16x = 0$

$x \cdot (4x^2 + 18x + 16) = 0$

$x = 0$ oder $4x^2 + 18x + 16 = 0 \quad |:4$

$x^2 + \frac{9}{2}x + 4 = 0 \quad |PQ$

$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{64}{16}}$

$x_1 \approx -3{,}28 \qquad x_2 \approx -1{,}22$

② HB.: $f'''(0) = 16 \neq 0$ ⇒ WP

$f'''(-1{,}22) \neq 0$ ⇒ WP

$f'''(-3{,}28) \neq 0$ ⇒ WP

③ y-Ko:

$f(0) = 0$

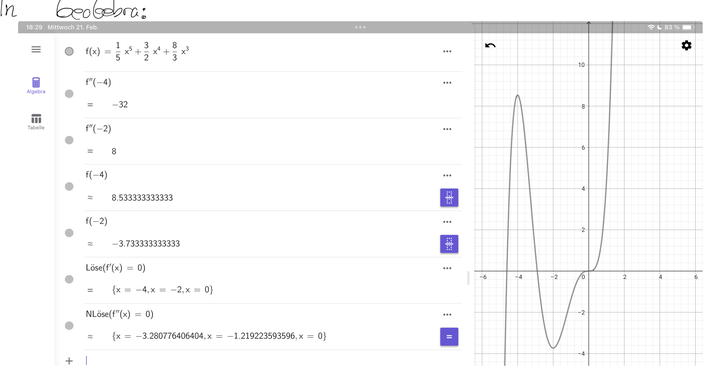
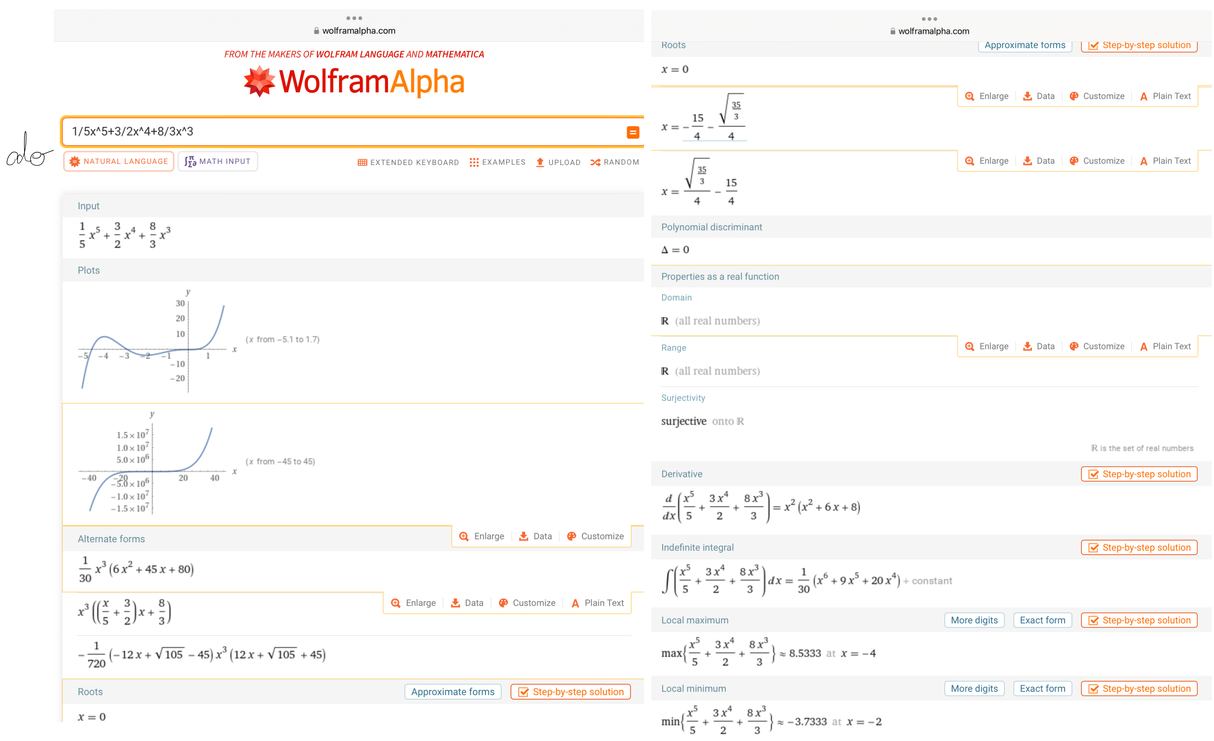
f(−3.28)

≈ 3.587097285973

f(−1.22)

≈ −2.059801125973

In GeoGebra:



oder