14.08.2025
Mittwoch, 13. August 2025 21:46

9 Summen und Reihen

9.1 Gauß'sche Summenformel

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\sum_{i=1}^{10} i$$

Startwert (Laufindex)

Wie lautet die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen?

Abbildung 9.1: Carl Friedrich Gauß [8], 1777-1855

$$\sum_{i=1}^{100} i = ?$$

1+2+3+4+5+...+49+50+51+...+95+96+97+98+99+100

101
101
101
101

$= 50 \cdot 101 = 5050$

Allgemein für die Summe der natürlichen Zahlen bis n ergibt sich die Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Wie kann man die Allgemeingültigkeit dieser Formel beweisen?

9.1.1 Vollständige Induktion

Beweise von Aussagen über natürliche Zahlen erfolgen oft mittels des Beweisverfahrens namens Vollständige Induktion.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

1. Induktionsanfang:
Bestätige die Vermutung für das kleinste n:

Für $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓

2. Induktionsschritt von n nach $n+1$:
Man nimmt an (und darf dabei verwenden), dass die Aussage für n gilt und versucht, durch Umformungen die Aussage für $n+1$ herzuleiten:

Zu zeigen (Formel gilt auch für $n+1$): $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$

ersetze n durch $n+1$

Start ⟶ Ziel

durch Umformung, dabei darf man die Formel n, die sog. Induktionsvoraussetzung verwenden $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Trick:

letzte Summand

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2\cdot(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\cdot\overbrace{((n+1)+1)}^{(n+2)}}{2}$$ ✓

Start
Trick letzten Summanden abspalten
Ziel

9.2 Lineare Regression

1. Ist der Zusammenhang zwischen x und y aus der Theorie bekannt, setzt man entsprechend an.

2. Man orientiert sich an der Punktwolke und sucht einen sinnvollen Funktionstyp als Ansatz.

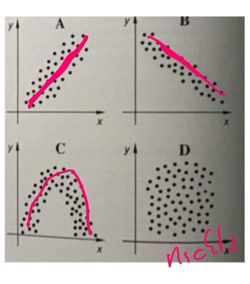
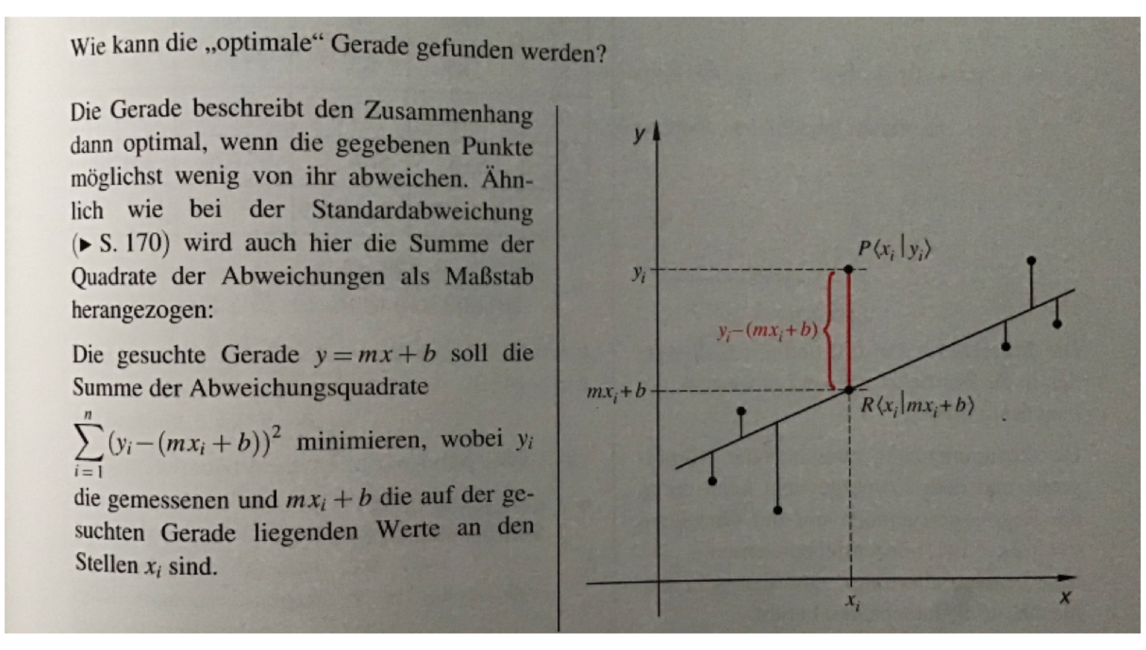


Abbildung 9.2: Messpunkte



Wie kann die „optimale" Gerade gefunden werden?

Die Gerade beschreibt den Zusammenhang dann optimal, wenn die gegebenen Punkte möglichst wenig von ihr abweichen. Ähnlich wie bei der Standardabweichung (▸ S. 170) wird auch hier die Summe der Quadrate der Abweichungen als Maßstab herangezogen:

Die gesuchte Gerade $y=mx+b$ soll die Summe der Abweichungsquadrate $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(mx_i+b))^2$ minimieren, wobei y_i die gemessenen und mx_i+b die auf der gesuchten Gerade liegenden Werte an den Stellen x_i sind.

Problem, in der obigen Summe der Abweichungsquadrate sind zwei Variablen m und b vorhanden. Mehrdimensionale Analysis oder Matrizenrechnung wird dazu benötigt.
Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

und $b=\bar{y}-m\bar{x}$ (wobei $\bar{y}$ und $\bar{x}$ jeweils die arithmetischen Mittelwerte der y-Koordinaten bzw. x-Koordinaten sind).

Übung:
Gegeben sind die Punkte $P_1(-3,\ 14)$, $P_2(-2,\ 11)$, $P_3(0,\ 5)$, $P_4(2,\ -1)$ und $P_5(8,\ -19)$.
a) Bestimmen Sie die durch diese festgelegte Regressionsgerade.
b) Bestimmen Sie weiterhin den Korrelationskoeffizient.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y},$$

wobei

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}}$$

die Standardabweichung der x-Werte und s_y entsprechend für die y-Werte definiert ist. Liegt r betraglich nahe bei 1, so ist die Näherung gut, sonst schlecht. Was ist hier der Fall?

9.3 Wichtige Reihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \quad (9.1)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots \quad (9.2)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots \quad (9.3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \quad (9.4)$$