Lösungen Blatt 9

Samstag, 15. Februar 2025 17:50

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Exponentialgleichungen

Aufgabe 1 Berechnen Sie jeweils die unbekannte Größe x.

(a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ $\quad\log_{\sqrt{3}} x = 8$ $\quad\log_{\sqrt{5}} x = 6$ $\quad\log_9 x = \frac{1}{4}$

(b) $\log_x 16 = 4$ (c) $\log_x 27 = 3$ (d) $\log_4(5x-1) = -1$

(e) $\log_2(x^2-1) = 4$ (f) $\log_5 x^2 = 3$ (g) $\log_x(x+6) = 2$

(h) $\log_x(15-2x) = 2$ (i) $\log_x(32-4x^2) = 4$

Aufgabe 2 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in $\mathbb{R}$.

(a) $2^x = 5$ (b) $3^x = 24$ (c) $4^x = \frac{1}{3}$

(d) $2^{x+2} = 5$ (e) $3^{4x} = 5$ (f) $4^{2x+1} = 5$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Exponentialgleichungen.

(a) $3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$ (b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$

(c) $2^{x+2} + 2^x = 40$ (d) $2^{x+3} + 2^x = 144$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ folgender Exponentialgleichungen.

(a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$ (b) $2^x + 4 = 32 \cdot 2^{-x}$

(c) $3^x + 6 \cdot 3^{-x} = 5$ (d) $3^x + 6 = 27 \cdot 3^{-x}$

(e) $2^{x+2} + 1 = 2^{-x-1}$ (f) $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$

(g) $2^{x-2} = 2^{3-x} + 1$ (h) $2^{x+1} - \frac{1}{2^x} = 1$

Aufgabe 5 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in $\mathbb{R}$.

(a) $16^x - 12 \cdot 4^x + 32 = 0$ (b) $3^{2x+1} \cdot 3^{x-1} = 1$

Aufgabe 6 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Logarithmengleichungen.

(a) $\ln x^5 = \ln x^2 + 6$ (b) $\frac{1}{3}\lg x^2 + \frac{1}{2}\lg x^3 = \frac{2}{100}$

---

a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2} \quad | 25^x$

$\cancel{25}^{\cancel{\log_{25}} x} = 25^{-\frac{1}{2}}$

$x = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

a) $2^x = 5 \quad | \log_2$

$\cancel{\log_2} 2^x = \log_2 5$

$x = \log_2 5$

Taschenrechner:

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\ln 2^x = \ln 5 \quad$ 3. Log-Gesetz

$x \cdot \ln 2 = \ln 5 \quad | : \ln 2$

$x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$x^2 \cdot x^5 = x^{2+5}$

$3^{-1} = \frac{1}{3^1}$

$\frac{1}{3} + \frac{3 \cdot 3}{3}$

$= \frac{28}{3}$

$\frac{84}{\frac{28}{3}} = \frac{\cancel{84}^{3}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{28}_{1}} = 9$

$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 84$

$3^x (3^{-1} + 3^2) = 84 \quad | \quad 3^x = \frac{84}{(3^{-1}+3^2)}$

$3^x = \frac{84}{\frac{1}{3}+9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{84}{\frac{28}{3}} = 9 \quad$ ablesen $\quad x = 2$

oder $3^x = 9 \quad | \ln$

$\ln 3^x = \ln 9 \quad$ 3. Log-Gesetz

$x \cdot \ln 3 = \ln 9$

$x = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$

Logarithmengesetze, für $a > 0$, $x > 0$ und $y > 0$

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,
3. $\log_a(x^n) = n \cdot \log(x)$,

$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_a(x)$,

Die wichtigsten Potenzgesetze

Multiplikation und Division bei gleichen Basen:	① $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a \in \mathbb{R}$ $\quad m, n \in \mathbb{Q}$
	② $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a \in \mathbb{R}^*$ $\quad m, n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a, b \in \mathbb{R}^*$ $\quad n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	③ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a \in \mathbb{R}$ $\quad m, n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad m \in \mathbb{Z}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$a^0 = 1 \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$ $\quad n \in \mathbb{Q}$

Quelle: https://123mathe.de/exponentialgleichungen-loesen-regeln

① b) $\log_x 16 = 4 \quad | x^x$

$\cancel{x}^{\cancel{\log_x} 16} = x^4$

$16 = x^4$

$\Rightarrow x = +2$ oder $\cancel{x = -2}$

entfällt, da nur positive Basis erlaubt!

e) $\log_2(x^2-1) = 4 \quad | 2^x$

$x^2 - 1 = 2^4$

$x^2 - 1 = 16$

$x^2 = 17 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = \sqrt{17}$ oder $x_2 = -\sqrt{17}$

② d) $2^{x+2} = 5 \quad | \ln$

$\ln 2^{x+2} = \ln 5$

$(x+2) \cdot \ln 2 = \ln 5 \quad | : \ln 2$

$x + 2 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad | -2$

$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 2$

③ b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$

$2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^2 = 34$

$2^x \cdot (2^{-2} + 2^2) = 34 \quad | \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$2^x \cdot \left(\frac{1}{4} + 4\right) = 34$

$2^x \cdot \left(\frac{17}{4}\right) = 34$

$2^x = \frac{\cancel{34}^{2} \cdot 4}{\cancel{17}_{1}}$

$2^x = 8$

ablesen $x = 3$

④ a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$

$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$

Substitution $z = 2^x$

$4 \cdot z^2 - 35 \cdot z + 24 = 0 \quad | : 4$

$z^2 - \frac{35}{4} \cdot z + 6 = 0 \quad | \text{PQ}$

$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{\left(-\frac{35}{4}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{8}\right)^2 - 6}$

$= \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{1225}{64} - \frac{384}{64}}$

$= \frac{35}{8} \pm \sqrt{\frac{841}{64}}$

$= \frac{35}{8} \pm \frac{29}{8}$

$z_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ oder $z_2 = \frac{64}{8} = 8$

$2^x = \frac{3}{4} \quad | \ln$ $\qquad 2^x = 8$

$x \cdot \ln 2 = \ln \frac{3}{4}$ $\qquad$ ablesen $x = 3$

$x = \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2}$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,

$\log_a(x^n) = n \cdot \log(x)$,

$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_a(x)$,