15.08.2025

Freitag, 14. Februar 2025 11:17

10 Integralrechnung und ihre Anwendungen

10.1 Unbestimmte Integrale

Betrachtet wird nun die Umkehrung des Ableitens, das Aufleiten bzw. Integrieren: Gegeben ist eine Funktion f, man sucht eine Funktion F von der diese abstammt, d.h.

Definition 1.1: Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion einer gegebenen Funktion f, falls gilt: $F'(x) = f(x)$.

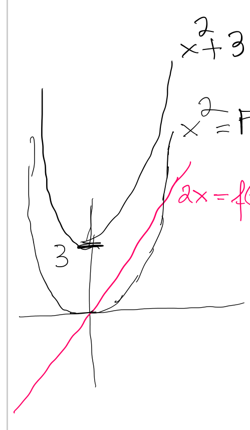
gegeben: $f(x) = x^2$	allgemein (Potenzregel): $f(x) = x^n$
gesucht: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$	
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$	Merke: Der Exponent wird um 1 erhöht, davor kommt der Kehrwert des erhöhten Exponenten
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7$	
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R}$ allgemein	
Schreibweise:	Variable, nach der integriert: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

Definition 1.2: Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

gibt die Menge aller Stammfunktionen an.



Steigung der Parabel ändert sich nicht bei Verschiebung entlang y-Achse

Wie beim Differenzieren gilt auch beim Integrieren die Faktor und Summenregel.
Als erste Integrationsregel betrachten wir einen Spezialfall der Integration mittels Substitution:

Merke:

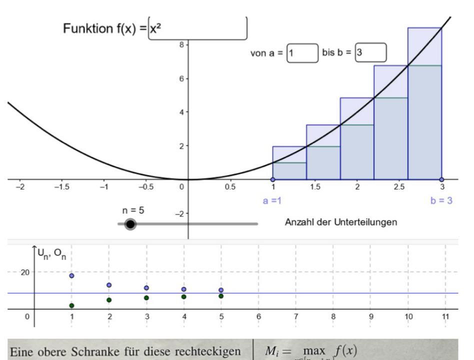
Bei einer verketteten Funktion, bei der die innere Funktion linear ist, schreibt man den Kehrwert der inneren Ableitung vor die aufgeleitete äußere Funktion (wobei die innere Funktion darin unverändert bleibt), z.B.:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c \qquad \int \cos(2x+1)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + c$$

$\int e^{x^2+1}dx$ nicht linear

10.2 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte

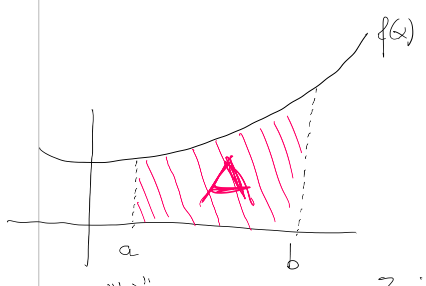
Ziel ist die Bestimmung des Flächeninhalts, den der Graph einer Funktion f mit der x-Achse einschließt. Das bestimmte Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen (Darboux-Riemann-Integral) beruht auf der Idee, den Flächeninhalt mittels einfach zu berechnender Reckteckflächen anzunähern. Als Voraussetzung dafür reicht die Beschränktheit der Funktion f im Intervall $[a;b]$ und die dortige Stetigkeit bis auf endlich viele Ausnahmen.
Das Intervall $[a;b]$ wird dazu in n Teilintervalle $[x_{i-1}; x_i]$ mit $i = 1, ..., n$ zerlegt [3][2].



Eine obere Schranke für diese rechteckigen Flächeninhalte erhält man, indem man $f(\xi_i)$ durch den jeweils größten Funktionswert M_i im Intervall $[x_{i-1};x_i]$ nach oben abschätzt. Ebenso erfolgt eine Abschätzung nach unten durch den jeweils kleinsten Funktionswert m_i im Intervall $[x_{i-1};x_i]$.

$$M_i = \max_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \qquad m_i = \min_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})}_{U_n} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})}_{O_n}$$



$$\underset{\text{untere Grenze „von"}}{A = \int_a^b} f(x)\,dx = \underbrace{\left[\, F(x) \,\right]_a^b}_{\text{Zwischenschritt}} = F(b) - (F(a))$$

obere Grenze „bis"; in Stammfkt obere Grenze einsetzen; in Stammfkt untere Grenze einsetzen

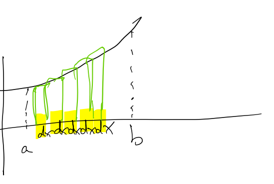
Integralzeichen

$\int \hat{=}$ langes S $\to$ Summe $= \Sigma$

, damit intuitive Deutung:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

kleines Stück auf x-Achse „Breite" eines Rechtecks; „Höhe" eines Rechtecks; Fläche eines ganz schmalen Rechtecks; Summe im Bereich von a nach b

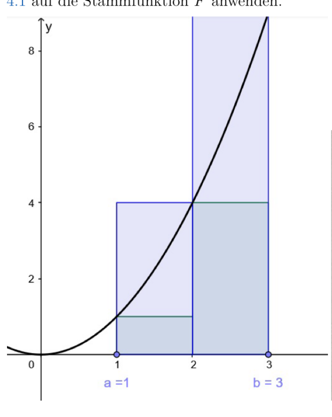


Definition 2.1: Bestimmtes Integral

Eine Funktion f im Intervall $[a;b]$ heißt **integrierbar**, wenn die Untersumme U_n und Obersumme O_n bei feiner werdender Zerlegung gegeneinander konvergieren. **Der gemeinsame Grenzwert heißt bestimmtes Integral von f** über $[a;b]$ und man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \boxed{\int_a^b f(x)\, dx}$$

Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion F, lässt sich das bestimmte Integral mittels F berechnen. Da f die stetige Ableitung von F ist, lässt sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 4.1 auf die Stammfunktion F anwenden.



In jedem Teilintervall $[x_{i-1};x_i], i = 1,...,n$ existiert ein ξ_i für das gilt:

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\Leftrightarrow f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_n) - F(x_0) \blacktriangleright x_0 = a; x_n = b$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

Die inneren Summanden heben sich gegenseitig auf, so dasss nur noch $F(b) - F(a)$ überbleibt. Damit ist:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})}_{U_n} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{F(b)-F(a)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})}_{O_n}$$

Somit muss der gemeinsame Grenzwert von Ober- und Untersumme $F(b) - F(a)$ betragen.

Mittels des Hauptsatzes der Integralrechnung besteht die Möglichkeit, Flächeninhalte, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, zu berechnen.

Definition 2.2: Hauptsatz der Integralrechnung

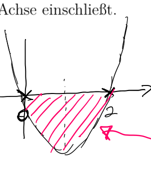
Sei f im Intervall $[a;b]$ **stetig und** f **habe eine Stammfunktion** F, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte im Intervall $[a;b]$.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den der Graph von $f(x) = x^2 - 2x$ zwischen den Nullstellen mit der x-Achse einschließt.

$x^2 - 2x = 0$
$x \cdot (x-2) = 0$
$x = 0$ oder $x - 2 = 0$, $x = 2$



$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2 - \left(\frac{1}{3}0^3 - 0^2\right)$$
$$= \frac{8}{3} - 4\frac{3}{3} - 0$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{4}{3}$$

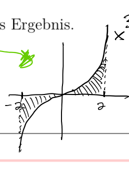
negativ orientierter Flächeninhalt, da Fläche unterhalb der x-Achse liegt

tatsächlicher Flächeninhalt: $A = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ FE (Flächeneinheiten)

b) Berechnen Sie

$$\int_{-2}^{2} x^3\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4\right)$$
$$= 4 - (4)$$
$$= 0$$

und deuten Sie das Ergebnis.



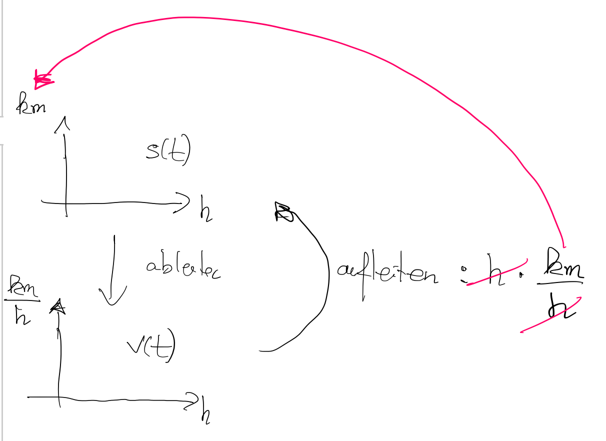
Merke:

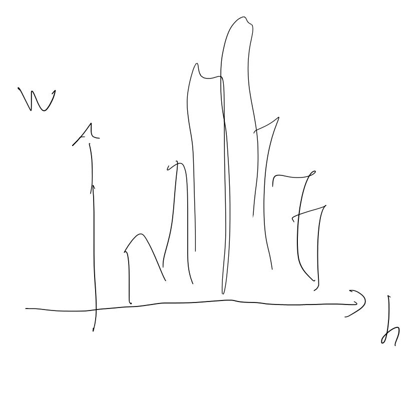
Um den tatsächlich vorhandenen Gesamtflächeninhalt zu ermitteln, kann man
a) die Beträge der Teilintegrale bilden, wobei die Nullstellen die Trennstellen sind

$$A = \left|\int_{-2}^{0} x^3 dx\right| + \int_0^2 x^3 dx$$

b) ggf. Symmetrien ausnutzen

$$A = 2 \cdot \int_0^2 x^3 dx$$
$$= 2 \cdot 4 = 8 \text{ FE}$$





$\int \Rightarrow W \cdot h$

Fläche „Wattstunden"

Merke:

Für die Einheit des Ergebnisses einer Integration gilt, dass die Einheiten der x-Achse und y-Achse miteinander multipliziert werden.

10.3 Partielle Integration

Diese Integrationsregel kann man als Produktregel der Integration auffassen und ergibt sich aus dieser:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad | \int$$
$$\int (u \cdot v)' = \int (u' \cdot v + u \cdot v')$$
$$u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v' \quad | - \int u v' \quad \Leftrightarrow \boxed{u \cdot v - \int u v' = \int u' v}$$

Definition 3.1: Partielle Integration

Die Funktionen u und v seien im Intervall $[a;b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

gegebene Aufgabe

$$\boxed{\int u' \cdot v\, dx} = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx$$

Merke: Wähle v als die Funktion (Faktor), die sich beim Ableiten vereinfacht (abbaut).

Beispiele:

a)

$$\boxed{\int \underset{u'}{e^x} \cdot \underset{v}{3x}\, dx} = \underset{u}{e^x} \cdot \underset{v}{3x} - \underbrace{\int \underset{u}{e^x} \cdot \underset{v'}{3}\, dx}_{\text{„im Kopf" lösbar}}$$
$$= e^x \cdot 3x - e^x \cdot 3 + c$$
$$(= e^x \cdot (3x - 3) + c$$

Restintegral $\Rightarrow$ Ziel, dies elementar zu lösen!

b)

$$\boxed{\int \underset{v}{2x} \cdot \underset{u'}{\sin(x)}\, dx} = \underbrace{\underset{u}{-\cos(x)} \cdot \underset{v}{2x}} - \int \underset{u}{-\cos(x)} \cdot \underset{v'}{2}\, dx$$
$$= -2x\cos(x) - 2 \cdot \underbrace{\int -\cos(x)\, dx}_{(-\sin(x))}$$
$$= -2x\cos(x) + 2\sin(x) + c$$

Faktoren kann man vor das Integral ziehen

10.4 Integration mittels Substitution

Dieses Integrationsverfahren wird meist bei verketteten Funktionen angewendet. Man kann versuchen die innere Funktion zu substituieren (insbesondere, falls dessen Ableitung im Funktionsterm vorkommt).

Notationen für Ableitungen:

$z(x)$	$z(x)$	$z(x)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$z'(x)$	$\frac{dz}{dx}$	$\dot{z}(x)$

Beispiele:

a)

$$\int (2x+1) \cdot e^{x^2+x-4}\, dx$$

substituiere $z(x) = x^2 + x - 4$ | ableiten
$\frac{dz}{dx} = 2x + 1$ | umformen nach dx
$\boxed{\frac{dz}{2x+1} = dx}$

$$\int \cancel{(2x+1)} \cdot e^z \cdot \frac{dz}{\cancel{(2x+1)}}$$
$$= \int e^z dz$$
$$= e^z + c$$

Sinn, ein einfaches Integral in z zu erhalten

$$= e^{x^2+x-4} + c$$

zurücksubstituieren

Als wichtiger Spezialfall gilt:

b)

$$\int \frac{Ableitung Nenner}{Nenner} = ln|Nenner| + c$$

Bsp: $\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx = \ln|x^2+4| + c$

a) $\int 3x \cdot \sin(x^2+1)\, dx$

$z = x^2 + 1$
$\frac{dz}{dx} = 2x$
$\frac{dz}{2x} = dx$

$$\int 3\cancel{x} \cdot \sin(z) \cdot \frac{dz}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2} \cdot \int \sin(z)\, dz$$
$$= \frac{3}{2} \cdot (-\cos(z)) + c$$
$$= -\frac{3}{2}\cos(z) + c$$

zurück substituieren

$$= -\frac{3}{2}\cos(x^2+1) + c$$

b) $\int \frac{3}{3x+1}\, dx = \ln|3x+1| + c$

c) $\int \frac{4}{2x+1}\, dx = \int \frac{2 \cdot 2}{2x+1}\, dx$
$= 2 \cdot \int \frac{2}{2x+1}\, dx$
$= 2 \cdot \ln|2x+1| + c$

10.5 Partialbruchzerlegung

Zweck: Integration von echt gebrochen rationalen Funktionen. Grad Zähler < Grad Nenner
Idee: Mittels Partialbruchzerlegung wird der Bruch in einfacher zu integrierende Teilbrüche zerlegt (siehe oben).
Der Ansatz für die gesuchten Partialbrüche ist abhängig von der Anzahl und Art der Nullstellen des Nenners, es gilt:

Art der Nullstelle	Ansatz
jede einfache NS x_n	$\frac{A}{x - x_n}$
doppelte NS x_n	$\frac{B}{x - x_n} + \frac{C}{(x - x_n)^2}$
komplexe NS	$\frac{Dx + E}{x^2 + k}, k > 0$

Beispiel:

a)

$$\int \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 2}dx$$

Ziel A und B bestimmen

① NS vom Nenner:
$x^2 - 3x + 2 = 0$ | PQ
⋮
$x_1 = 1$ oder $x_2 = 2$
zwei einfache NS!

② Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x+1}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad | \text{ Hauptnenner bilden!}$$

Nenner als Linearfaktoren

$$\frac{2x+1}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{A \cdot (x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)} + \frac{B \cdot (x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)}$$

| nur noch die Zähler betrachten

$$2x+1 = A \cdot (x-2) + B \cdot (x-1)$$

Man setzt für x die NS ein: $x = 1$:
$$2 \cdot 1 + 1 = A \cdot (1-2) + \cancel{B \cdot (1-1)}$$
$$3 = -A$$
$$\boxed{-3 = A}$$

$x = 2$:
$$2 \cdot 2 + 1 = \cancel{A \cdot (2-2)} + B \cdot (2-1)$$
$$\boxed{5 = B}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-3}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-2}dx$$
$$= -3 \cdot \int \frac{1}{x-1}dx + 5 \cdot \int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= -3 \ln|x-1| + 5 \cdot \ln|x-2| + c$$