Blatt 6

Mittwoch, 12. Februar 2025 21:50

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 1

a) $\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$

b) $\int (x^3 + 2x - 4)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x + c$

c) $\int \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x\right)dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$

d) $\int (e^x + x^2)\,dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$

e) $\int (e^{2x} + 3)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x + c$

f) $\int (2xt^2 + 2xt - 4)\,dt = \frac{2}{3}xt^3 + \frac{1}{2}2xt^2 - 4t + c = \frac{2}{3}xt^3 + xt^2 - 4t + c$

g) $\int (\cos(x) - e^{-x} + 1)\,dx = \sin(x) + e^{-x} + x + c$

h) $\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + c$

i) $\int e^{2x+3}\,dt = e^{2x+3}\cdot t + c$

$\int 4\,dt = 4t + c$

j) $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$

k) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

l) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x^1} + c$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

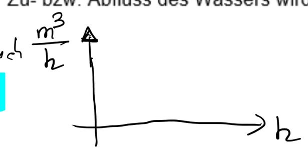
Aufgabe 2

Swimmingpool

Ein quaderförmiger Swimmingpool mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft beschrieben durch die Zulaufratenfunktion mit

$$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t; \quad 0 \le t \le 9$$

Definitionsbereich



$\overset{\nabla}{\Longrightarrow} \int$ liefert als Einheit $\frac{m^3}{\cancel{h}}\cdot\cancel{h} = m^3$ ↓ Wassermenge

(f(t) in m³ pro Stunde, t in Stunden)

a) Gib die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu noch abläuft, und berechne die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

b) Skizziere den Graphen der Zulaufratenfunktion f.

handschriftlich ⇒ c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Pool?

Ansatz CAS (Computer Algebra System)

d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m^3 beträgt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Integrale durch partielle Integration.

(a) $\int x^2 \sin(3x)\,dx$

(b) $\int \sin^2(x)dx$

(c) $\int x\, e^{2x}\,dx$

18:14 Freitag 23. Feb.

wolframalpha.com

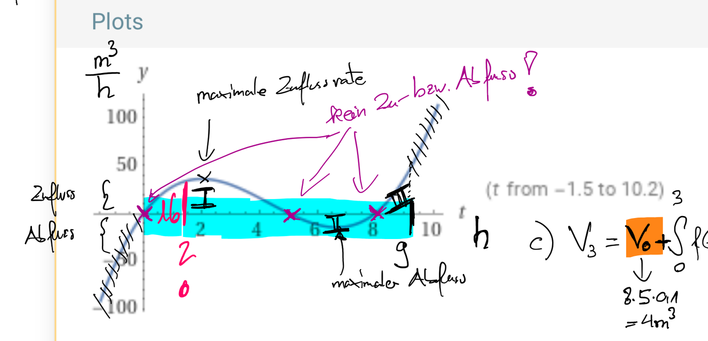
t^3-13t^2+40t

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

Plots



c) $V_3 = V_0 + \int_0^3 f(t)\,dt$

$V_0 = 8\cdot 5\cdot 0{,}1 = 4\,m^3$

Roots Nullstellen

$t = 0$ h

$t = 5$ h

$t = 8$ h

Local maximum

$\max\{t^3 - 13t^2 + 40t\} = 36$ at $t = 2$

Local minimum

$\min\{t^3 - 13t^2 + 40t\} = -\frac{400}{27}$ at $t = \frac{20}{3}$

Integrate t^3-13t^2+40t From t=0 to t=5

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Definite integral I

$\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$

Integrate t^3-13t^2+40t From t=5 to t=8

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Definite integral II

$\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = -\frac{117}{4} = -29.25$

Integrate t^3-13t^2+40t From t=8 to t=9

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Definite integral III

$\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t)\,dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$

CAS (Computer Algebra System)

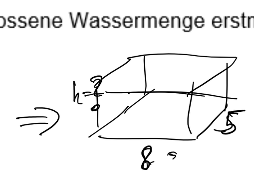
d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs. [0; 9] Anfangsmenge

e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist. (wieviel Wasser insgesamt bewegt wurde)

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m^3 beträgt.

d) $V_9 = V_0 + \int_0^9 f(t)\,dt = 105{,}25\,m^3 \Rightarrow$



$h\cdot 5\cdot 8 = 105{,}25$

$h =$

e) $V_{max} = V_0 + \int_0^5 f(t)\,dt$, da $|II| > III$

f) $V_{Gesamt\,bewegt} = \int_0^5 + \left|\int_5^8\right| + \int_8^9$

g) $\int_0^b f(t)\,dt = 16$

$\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^b = 16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - \cancel{\left(\frac{1}{4}0^4 - \frac{13}{3}0^3 + 20\cdot 0^2\right)} = 16 \quad | -16$

umformen als Nullstellenproblem

$$\boxed{\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - 16 = 0}$$

↪ hat keine ganzzahligen Lösung

↪ handschriftlich nicht mehr lösbar!

↪ numerisch lösbar

$b \approx \cancel{-0.82118}$ nicht im Definitionsbereich

$\boxed{b \approx 1.0030}$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale durch geeignete Substitutionen.

(c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(16 + 2x^2)^3}}$

d) $\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\,dx$

a) $\int 3x \cdot \sin(x^2 + 1)\,dx$

b) $\int \frac{3}{3x+1}\,dx$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Integrale durch Partialbruchzerlegung.

(a) $\int \frac{6x + 10}{x^2 + 2x - 3}\,dx$

(b) ~~$\int \frac{3x^5 + 2x^4 + 2x^3}{x^4 - 1}\,dx$~~

(c) $\int \frac{6x^2 - 4x - 7}{x^3 - 3x - 2}\,dx$

NS vom Nenner
$x = -1$ doppelt
$x = 2$ einfach

Aufgabe 6

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren.

(a) $\int_0^\infty x e^{-x}\,dx$

(b) $\int_0^1 \ln(2x)\,dx$

(C) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Volumen V der Rotationskörper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen:

(a) $f(x) = \frac{r}{h}x \quad , \quad 0 \le x \le h$

(b) $f(x) = 4\sqrt{x} \quad , \quad [0; 4]$