16.08.2025

Mittwoch, 12. Februar 2025 21:38

8 Steckbriefaufgaben und Lineare Gleichungssysteme

8.1 Synthese aus gegebenen Punkten

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Gesucht ist eine Gerade, die durch die Punkte $A(1\,|\,3)$ und $B(-3\,|\,-5)$ verläuft:
gesucht: $f(x) = m \cdot x + b$
gegeben:

$A(1|3) \rightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow m \cdot 1 + b = 3$
$B(-3|-5) \rightarrow f(-3) = -5 \Leftrightarrow m \cdot (-3) + b = -5$
$\leadsto$ LGS $\begin{pmatrix} m + b = 3 \\ -3m + b = -5 \end{pmatrix}$

Gesucht ist eine Parabel, die durch die Punkte $A(1\,|\,6)$, $B(2\,|\,11)$ und $C(-2\,|\,3)$ verläuft:
gesucht: $f(x) =$
Merke: ... Parameter sind gesucht, dann benötigt man auch ... Bedingungen/Informationen
gegeben:

Übung:
Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, die durch die Punkte $A(1\,|\,-32)$, $B(-2\,|\,4)$, $C(-3\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0)$ verläuft:
gesucht: $f(x) =$

8.2 Lineare Gleichungssysteme

8.2.1 Gauß-Verfahren

$$\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -2,5 \end{pmatrix}$$

Ziel: Zahlen für x und y zu finden, so dass beide Gleichungen erfüllt sind

Man darf:

- eine Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren/dividieren
- zwei Zeilen miteinander addieren (subtrahieren)
- Zeilen (Spalten) vertauschen

Abbildung 8.1: Carl Friedrich Gauß[8], 1777-1855

$$\begin{pmatrix} -2x & + & 4y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -2,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

Nebenrechnung (Kopfrechnung):
$\begin{pmatrix} -6x + 12y = 12 \\ 6x + 2y = -5 \end{pmatrix}$ +
$0 \quad 14y = 7$

Ziel: hier soll eine 0 entstehen

$3 \cdot I + 2 \cdot II \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x + 4y = 4 \\ 0 + 14y = 7 \end{pmatrix}$

Damit $14y = 7 \quad |:14$
$y = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

in I: $-2x + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$
$-2x + 2 = 4$
$-2x = 2$
$x = -1$

Lösung aufgeschrieben als ein sogenannter Vektor (Lösungsvektor):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Übungen:

a)
$$\begin{pmatrix} -3x & + & y & = & -1 \\ 4x & - & y & = & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ -4x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \cdot 4 \end{matrix}$$

übernommen
$(-2) I + II \Rightarrow$
$4 \cdot I + III \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -3 \\ 0 - 3y + 7z = 15 \\ 0 + 6y - 9z = -15 \end{pmatrix} \cdot 2$

übernommen (fertig)
$II + III \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -3 \\ 0 - 3y + 7z = 15 \\ 0 \quad 0 + 5z = 15 \end{pmatrix} \quad :5 \Rightarrow z = 3$

Merke:
I + II
I + III geeignet addieren
II + III geeignet addieren

in II: $-3y + 7 \cdot 3 = 15$
$-3y + 21 = 15$
$-3y = -6$
$y = 2$

in I: $x + 2 - 2 \cdot 3 = -3$
$x + 2 - 6 = -3$
$x - 4 = -3$
$x = 1$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Feb.
wolframalpha.com
FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA
WolframAlpha

solve x+y-2z=-2 , 2x+3y+z=7 , 3x-2y+2z=5

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD

Input interpretation

solve
$x + y - 2z = -2$
$2x + 3y + z = 7$
$3x - 2y + 2z = 5$

Result

$x = 1$ and $y = 1$ and $z = 2$

Übung:

a)
$$\begin{pmatrix} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{matrix}$$

$-2 \cdot I + II \Rightarrow$
$-3 \cdot I + III \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} x + y - 2z = -2 \\ 0 + y + 5z = 11 \\ 0 - 5y + 8z = 11 \end{pmatrix} \cdot 5$

$5 \cdot II + III \Rightarrow \begin{pmatrix} x + y - 2z = -2 \\ 0 + y + 5z = 11 \\ 0 \quad 0 \quad 33z = 66 \end{pmatrix} \quad :33$

$\Rightarrow z = 2$

in II: $y + 5 \cdot 2 = 11$
$y = 1$

in I: $x + 1 - 2 \cdot 2 = -2$
$x + 1 - 4 = -2$
$x = 1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -6x & + & 9y & = & 2 \end{pmatrix} \cdot 3$$

$\begin{pmatrix} 2x - 3y = 1 \\ 0 \quad 0 = 5 \end{pmatrix}$ ↯ Widerspruch
$\Rightarrow$ LGS hat keine Lösung

Merke:

Bei LGS, die gleich viele Zeilen wie Variablen haben, kann man nach Durchführung des Gauß-Verfahrens (Herstellung der Stufenform) die Lösungsart in der letzten Zeile ablesen, es gibt 3 Fälle:

- $0 \quad 0 \quad 3z = 6 \Rightarrow$ eindeutige Lösung
- $0 \quad 0 \quad 0 = 5$ ↯ $\Rightarrow$ keine Lösung
- $0 \quad 0 \quad 0 = 0$ Nullzeile $\Rightarrow$ unendlich viele Lösung

Beispiel zu Fall 3:

$$\begin{pmatrix} 7x & - & 14y & + & 7z & = & 21 \\ x & - & 10y & + & 5z & = & 15 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-7) \\ \cdot 7 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 7x - 14y + 7z = 21 \\ 0 \quad 56y - 28z = -84 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

nach einer Variablen umformen
aus II: $56y - 28z = -84$
$56y = -84 + 28z \quad |:56$
$y = -\frac{84}{56} + \frac{28}{56}z$
$\boxed{y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}z}$
(y ist abhängig von z, und z ist frei wählbar!)

in I: $7x - 14 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}z\right)}_{y} + 7z = 21$
$7x + \cancel{21} - \cancel{7z} + \cancel{7z} = \cancel{21}$
$7x = 0$
$\boxed{x = 0}$

Mögliche Lösungen:
Für $z = 1$: $y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = -1$ und $x = 0$ (immer)
$z = 2$: $y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 = -0,5$ und $x = 0$
⋮

Parameter, frei wählbar
z ist frei wählbar: $\boxed{z = k}$, damit $\boxed{y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}k}$

in Vektorschreibweise:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Für $k = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für $k = 2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Die unendlich vielen Lösungen in Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$$

Übung:
Das folgende LGS hat unendlich viele Lösungen, berechnen Sie diese und schreiben Sie diese in Vektorschreibweise auf.

$$\begin{pmatrix} 2x & + & 4y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 7z & = & -3 \\ 4x & + & 8y & - & 2z & = & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 2x + 4y - z = 3 \\ 0 - 3y - 6z = -6 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{pmatrix}$

aus II: $-3y - 6z = -6$
$-6z = -6 + 3y \quad |:(-6)$
$\boxed{z = 1 - \frac{1}{2}y}$

in I: $2x + 4y - (1 - \frac{1}{2}y) = 3$
$2x + 4y - 1 + \frac{1}{2}y = 3$
$2x = 4 - \frac{9}{2}y \quad |:2$
$\boxed{x = 2 - \frac{9}{4}y}$

in Vektorschreibweise:
$\boxed{y = k}$
$\boxed{x = 2 - \frac{9}{4}k}$
$\boxed{z = 1 - \frac{1}{2}k}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, Bsp: $k = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ODER

aus II: $-3y - 6z = -6$
$-3y = -6 + 6z \quad |:(-3)$
$\boxed{y = 2 - 2z}$

in I: $2x + 4 \cdot (2 - 2z) - z = 3$
$2x + 8 - 8z - z = 3$
$2x = -5 + 9z$
$\boxed{x = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}z}$

z ist frei wählbar, $\boxed{z = m}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Bsp: $m = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8.2.2 Überbestimmte LGS

Führen Sie, wie gewohnt, das Gauß-Verfahren durch und geben Sie danach die Lösung des LGS an:

a)
$$\begin{pmatrix} 2x & - & 6y & = & 3 \\ x & - & 8y & = & -1 \\ 4x & - & 20y & = & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & = & 7 \end{pmatrix}$$

Gauß ! Nullzeile in III bedeutet hier nicht automatisch unendlich viele Lösungen! Zeilen darüber betrachten !

11 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$

$x^2 + 4$, keine NS !, $\mathbb{R}$

11.1 Kartesische Darstellung

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen. Definiert man die Zahl i mit $i^2 = -1$, die sogenante imaginäre Einheit, lassen sich Gleichungen lösen, die in den rellen Zahlen keine Lösung haben. Betrachte folgende Gleichung:

$$x^2 + 4 = 0 \quad |-4$$
$x^2 = -4 \quad |\sqrt{\ }$
$x^2 = \pm\sqrt{-4}$ ↯ keine Lösung in $\mathbb{R}$
$x^2 = \pm\sqrt{(-1) \cdot 4} = \pm\sqrt{i^2 \cdot 4} = \pm\sqrt{4i^2} = \pm 2i$, $x_1 = +2i$, $x_2 = -2i$ Lösungen in $\mathbb{C}$
konjugiert komplexes Lösungspaar!

Dies bedeutet, dass jede algebraische Gleichung positiven Grades über den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt, was für reelle Zahlen nicht gilt. Diese Eigenschaft ist der Inhalt des Fundamentalsatzes der Algebra.

Komplexe Zahlen lassen sich graphisch darstellen als Pfeile (Zeiger) in der sog. Gauß'schen Zahlenebene:

Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl: Realteil

$$z = a + b \cdot i$$

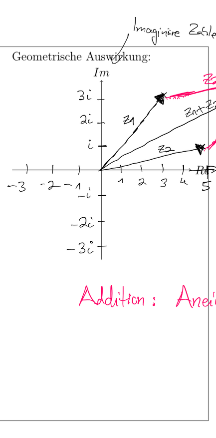
Imaginärteil

Bsp:

$z_1 = 3 + 3 \cdot i \quad \hat{=} (3,3)$

$z_2 = 5 + 1 \cdot i \quad \hat{=} (5,1)$

Geometrische Auswirkung:



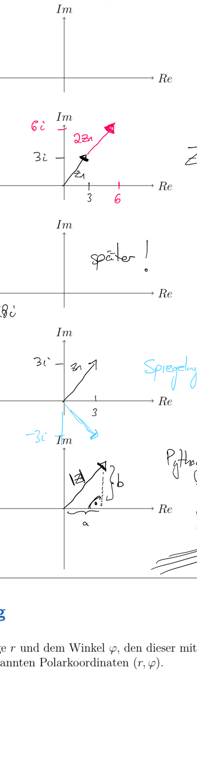
imaginäre Zahlen, reellen Zahlen, vgl. "Kräfteparallelogramm"

Addition: $z_1 + z_2$
$3 + 3i + 5 + 1i$
$= 8 + 4i$

Addition: Aneinander hängen der Zeiger

Addition:
$z_1 + z_2 =$
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$2 \cdot 3 = 6$

Geometrische Auswirkung:



Multiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl):
$2 \cdot z_1 = 2 \cdot (3 + 3i)$
$= 6 + 6i$

Zeiger verändert sich in Länge, hier doppelt so lang!

Multiplikation zweier komplexer Zahlen:
$z_1 \cdot z_2 = (3 + 3i) \cdot (5 + 1i)$
$= 15 + 3i + 15i + 3i^2 = 12 + 18i$

später!

Konjugiert komplexe Zahl:
$\bar{z}_1 =$
$z_1 = 3 + 3i$
$\bar{z}_1 = 3 - 3i$
(Imaginärteil wechselt Vorzeichen)

Spiegelung an x-Achse!

Betrag (Länge) einer komplexen Zahl:
$|z|$
$z = a + bi$

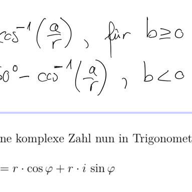
Es gilt: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Pythagoras:
$|z|^2 = a^2 + b^2$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

11.2 Trigonometrische Darstellung

Ein Zeiger lässt sich auch eindeutig über dessen Länge r und dem Winkel φ, den dieser mit der x-Achse einschließt, beschreiben. Dies sind die sogenannten Polarkoordinaten (r, φ).

$z = a + bi$



$\cos\varphi = \frac{a}{r} \quad \hat{=} \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

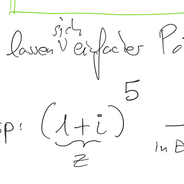
$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$

Definition 2.1: Bestimmung der Polarkoordinaten

Radius: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Winkel: $\varphi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & \text{für } b \geq 0 \text{ (Zeiger oberhalb x-Achse)} \\ 360° - \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & b < 0 \text{ (unterhalb ")} \end{cases}$

Bsp: $z = 1 + i$



$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$

Mittels Polarkoordinaten lässt sich eine komplexe Zahl nun in Trigonometrischer Form darstellen:

$$z = r \cdot \cos\varphi + r \cdot i \sin\varphi$$

Trigonometrische Darstellung:
$z = \sqrt{2} \cdot \cos 45° + \sqrt{2} \cdot i \sin 45°$

11.3 Darstellung in Exponentialform

Ebenfalls mittels Polarkoordinaten ergibt sich die Darstellung in Exponentialform, die z.B. bei der Bestimmung von Potenzen einer komplexen Zahl hilfreich ist.

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

In der Praxis: Exponentialform:
$\boxed{z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°}}$

Die nach Leonhard Euler benannte Eulerformel (Herleitung über Taylorreihen möglich) stellt eine Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Exponentialfunktionen mittels komplexer Zahlen dar:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Für den Winkel $\varphi = \pi$ ergibt sich aus der Euler'schen Formel die sogenannte Eulersche Identität

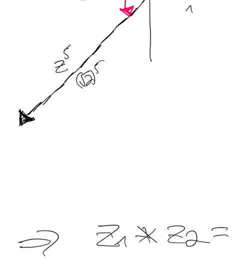
$$e^{i\pi} = -1$$

Eine der bekanntesten Formeln in der Welt, die einen Zusammenhang zwischen vier der bedeutendsten mathematischen Konstanten herstellt: der Euler'schen Zahl e, der Kreiszahl π, der imaginären Einheit i sowie der reellen Einheit 1. Umgeformt kommt noch die Null als weitere mathematisch bedeutende Konstante hinzu:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Damit lassen sich einfacher Potenzen, Produkte/Divisionen ~~berechnen~~: Potenzgesetze anwenden!

- Bsp: $\underbrace{(1+i)}_{z}^5 \xrightarrow{\text{in Exponentialform}} \left(\sqrt{2}e^{i \cdot 45°}\right)^5$
$= (\sqrt{2})^5 \cdot e^{i \cdot 45° \cdot 5}$
$= (\sqrt{2})^5 \cdot e^{i \cdot 225°}$



geometrisch:
Winkel * Exponent
Radius ^ Exponent

$180° = \pi$, $r = 1$

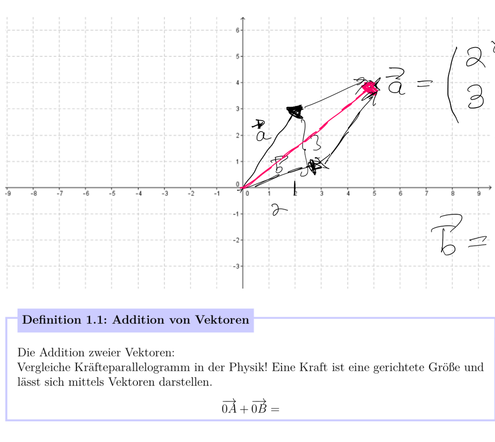
$1 \cdot e^{i \cdot \pi} = -1$
$e^{i \cdot \pi} = -1 \quad |+1$
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$
Euler'sche Formel

- Multiplikation: $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$
$\Rightarrow z_1 * z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$
$= (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Winkel addiert
- Radien multipliziert !

12 Vektorrechnung

12.1 Grundlagen

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe. Vektoren können durch Pfeile dargestellt werden. Jedem Punkt P im Koordinatensystem lässt sich ein sogenannter Ortsvektor $\vec{OP}$ zuordnen, der im Ursprung beginnt und in P endet. Die Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit denen von P überein.
Beispiel: $A(2\,|\,3)$ und $B(6\,|\,1)$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ x-KO, y-KO

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Definition 1.1: Addition von Vektoren

Die Addition zweier Vektoren:
Vergleiche Kräfteparallelogramm in der Physik! Eine Kraft ist eine gerichtete Größe und lässt sich mittels Vektoren darstellen.

$$\vec{0A} + \vec{0B} =$$

Definition 1.2: Multiplikation mit einem Skalar (reeller Zahl)

Bewirkt eine Veränderung der Länge bzw. der Orientierung, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert.

$$3 \cdot \vec{0A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Man erhält den sogenannten Gegenvektor durch Multiplikation mit -1.

Merke:

Prinzip: Endpunkt-Anfangspunkt

$$\vec{AB} =$$

"B - A"

12.2 Übungen

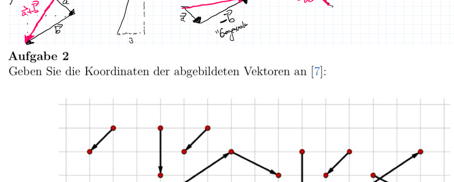
Wichtig: Vektoren lassen sich parallel verschieben (ohne dass sich die Koordinaten dabei ändern)

Aufgabe 1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie jeweils den angegebenen Vektor und veranschaulichen Sie dies jeweils durch eine Zeichnung![6]

(a) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{f} = -2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{e} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$



Aufgabe 2

Geben Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren an [7]: