27.08.2025

Samstag, 15. Februar 2025 17:46

13 Mengen und Ungleichungen

a) $A = \{3,4,5,6,7,8\}$ b) $B = \{-1,0,1,2,3,4\}$

13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen

Aufgabe 1

Geben Sie an, welche Zahlen zu den folgenden Mengen gehören.

Bedingung

(Primzahl: Eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat: 1 und sich selbst)

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \le x \le 8\}$ (d) $D = \{x \in \mathbb{P} | x \le 40\}$

(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} | -2 < y \le 4\}$ (e) $E = \{z \in \mathbb{Z} | |z| < 5\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{N} | z$ ist Teiler von $24\}$ $= \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

d) $D = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37\}$

e) $|-3| = 3$, $|3| = 3$ $E = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

Aufgabe 2

Geben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Bedingung an, welche die Elemente erfüllen müssen (vgl. Aufgabe 1).

(a) $A = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (d) $D = \{5,7,11,13,17,19\}$

(b) $B = \{5,6,7,8,\ldots\}$ (e) $E = \{4,5\}$

(c) $C = \{3,6,9,12,15,\ldots\}$ (f) $F = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \le x \le 8\}$
$-2 < x < 9$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x > 4\}$
$x \ge 5$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} | x$ ist ein Vielfaches von $3\}$
$x = 3 \cdot n$, mit $n \in \mathbb{N}$
$\frac{x}{3} \in \mathbb{N}$

d) $D = \{x \in \mathbb{P} | 5 \le x \le 19\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{N} | 4 \le x \le 5\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \le 3\}$
$|x| < 4$
$-3 \le x \le 3$

Aufgabe 3

Berechnen Sie...
$A \cup B$, $B \cap C$, $C \backslash D$, $D \backslash C$, $D \cup E$ und $E \cap F$

~~(a) mit den Mengen von Aufgabe 1!~~ (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

Aufgabe 4

Geben Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.
$A \cup B$, $B \cap C$, $C \backslash D$, $D \backslash C$, $D \cup E$ und $E \cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe 1! (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

$x \in \mathbb{N}$ mit $3 \le x \le 8$
$x \in \mathbb{N}$ mit $x \in [3;8]$ abgeschlossenes Intervall

Element von

vs

$x \in \mathbb{N}$ mit $3 < x < 8$
" " $x \in (3;8)$ offenes Intervall (Ränder nicht zugehörig)
$]3;8[$

③ vgl. A2) $E = \{4,5,10\}$

$A \cup E = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$
vereinigt
$\hat{=}$ ODER

$A \cap E = \{4,5\}$
geschnitten
$\hat{=}$ UND

$A \backslash E = \{-1,0,1,2,3,6,7,8\}$
"ohne"

Aufgabe 2

Geben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Bedingung an, w müssen (vgl. Aufgabe 1).

(a) $A = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (d) $D = \{5,7,11,13,17,19\}$

(b) $B = \{5,6,7,8,9,\}$ (e) $E = \{4,5\}$

(c) $C = \{3,6,9,12,15,\ldots\}$ (f) $F = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie...
$A \cup B$, $B \cap C$, $C \backslash D$, $D \backslash C$, $D \cup E$ und $E \cap F$

~~(a) mit den Mengen von Aufgabe 1!~~ (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

$A \cup B = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\}$

$B \cap C = \{6,9,12,15,\ldots\}$

$C \backslash D = C$

$D \backslash C = D$

$D \cup E = \{4,5,7,11,13,17,19\}$

$E \cap F = \{\}$ bzw. $\emptyset$ leere Menge

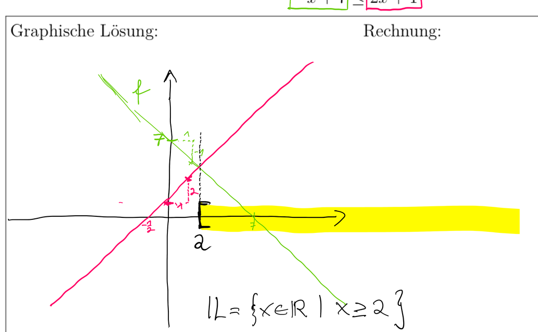
13.2 Ungleichungen

Beispiel:

Graph f ≤ Graph g

$\underbrace{\boxed{-x+7}}_{f(x)} \le \underbrace{\boxed{2x+1}}_{g(x)}$

Graphische Lösung:



$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 2\}$

Rechnung:

$-x+7 \le 2x+1$ $|-2x$ $|-7$

$-3x \le -6$ $|:(-3)$!

$x \ge 2$

Merke:

Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Relationszeichen um!!!

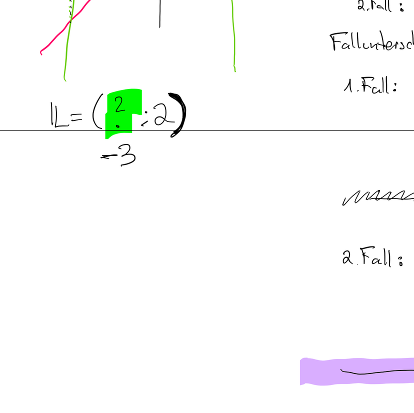
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung.

$\underbrace{\boxed{-x^2+4}}_{f(x)} > \underbrace{\boxed{x-2}}_{g(x)}$

Tipp: Stellen Sie die Ungleichung so um, dass eine Seite null wird. Bestimmen Sie dann die Linearfaktorzerlegung und fürhen damit eine Fallunterscheidung durch.

Graphische Lösung:



$\mathbb{L} = (-3;2)$

Rechnung:

$-x^2+4 > x-2$ $|-x$ $|+2$

$-x^2-x+6 > 0$ $|:(-1)$!

$\boxed{x^2+x-6} < 0$ $h(x)$

Linearfaktorzerlegung

$(x+3)\cdot(x-2) < 0$

1. Fall: $-$ $+$

2. Fall: $+$ $-$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x+3<0$ und $x-2>0$

$x<-3$ und $x>2$ $\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$

$\cap$ Schnittmenge

2. Fall: $x+3>0$ und $x-2<0$

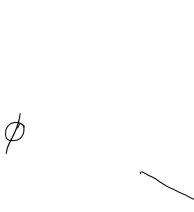
$x>-3$ und $x<2$ $\Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-3;2)$

Nullstellen: $x^2+x-6=0$ | PQ

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-6)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = -\frac{6}{2} = -3$ oder $x_2 = \frac{4}{2} = 2$



$\mathbb{L} = (-3;2)$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 = (-3;2)$
$\emptyset$

13.3 Betragsungleichungen

Wiederholung:

$|-4| = 4$
$|4| = 4$

$f(x) = |x| := \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

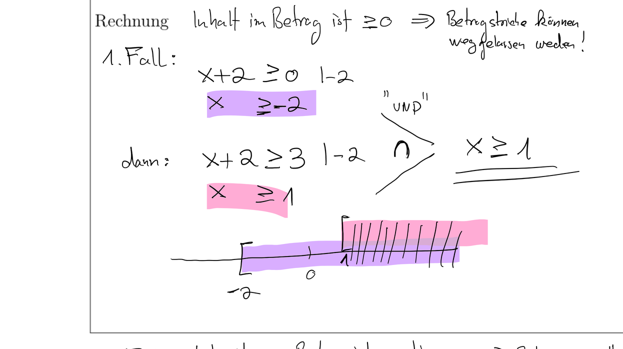
Merke:

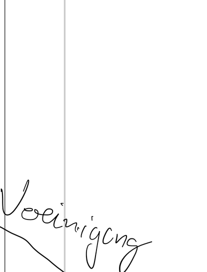
Bei der rechnerischen Lösung kann folgender Zusammenhang hilfreich sein: $|x|^2 = x^2$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$\underbrace{|x+2|}_{f(x)} \ge \underbrace{3}_{g(x)}$

Graphische Lösung: ~~Rechnung:~~





Rechnung Inhalt im Betrag ist ≥ 0 $\Rightarrow$ Betragsstriche können weggelassen werden!

1. Fall: $x+2 \ge 0$ $|-2$
$x \ge -2$

"UND" $\cap$ $x \ge 1$

dann: $x+2 \ge 3$ $|-2$
$x \ge 1$

2. Fall: Inhalt vom Betrag ist negativ <0 $\Rightarrow$ Betrag weg, also in Klammern und $-$ davor!

$x+2<0$ $|-2$
$x<-2$

Schnittmenge $\cap$ $\mathbb{L}_2 = x \le -5$
$(-\infty,-5]$

dann $-(x+2) \ge 3$ $|:-1$!
$x+2 \le -3$ $|-2$
$x \le -5$

Vereinigung

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \le -5$ oder $x \ge 1\}$

3. Möglichkeit

$|x+2| \ge 3$ $|{}^2$

$(x+2)^2 \ge 9$ $|\sqrt{\ }$

$x+2 \ge \pm\sqrt{9}$

$x+2 \ge \pm 3$

$x+2 \le -3$ oder $x+2 \ge 3$

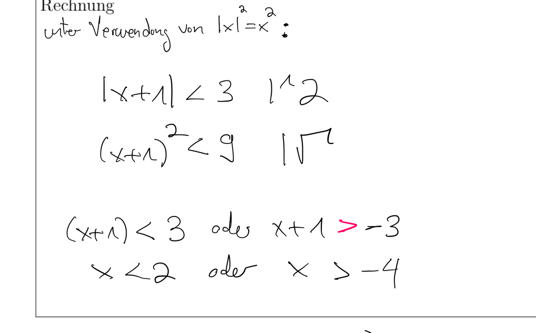
$x \le -5$ oder $x \ge 1$

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$|x+1| < 3$

Graphische Lösung:



Rechnung:

Fallunterscheidung für den Betrag:

1. Fall: $x+1 \ge 0$
$x \ge -1$

dann: $x+1<3$ $|-1$
$x<2$

$\mathbb{L}_1 = [-1;2)$

2. Fall: $x+1<0$
$x<-1$

dann: $-(x+1)<3$ $|:-1$
$x+1>-3$ $|-1$
$x>-4$

$\mathbb{L}_2 = (-4;-1)$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$
$= (-4;2)$

Rechnung
unter Verwendung von $|x|^2 = x^2$:

$|x+1| < 3$ $|{}^2$

$(x+1)^2 < 9$ $|\sqrt{\ }$

$(x+1) < 3$ oder $x+1 > -3$

$x<2$ oder $x>-4$

$\mathbb{L} = (-4;2)$

14 Regel von de L'Hospital

Merke:

Liegt bei einer Grenzwertbestimmung ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ vor, darf man Zähler und Nenner getrennt Ableiten und den Grenzwert danach neu bestimmen. Ggf. kann dies mehrfach erfolgen.

Beispiele:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{1} = 3$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{2x^2+6x} \;\frac{"\infty"}{"\infty"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+6} \;\frac{"\infty"}{"\infty"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2x}{2x-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-2x-e^{-x}}{x-\sin(x)} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-2+e^{-x}}{1-\cos(x)} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

c) $\lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to -2} \frac{3}{3x^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$ Umformung

d) $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-2x}$ $+\infty \cdot \to 0$ $= \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \;\frac{+\infty}{+\infty} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}e^{2x}} \;\frac{+\infty}{+\infty} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} \;\frac{"1"}{"\infty"} = 0$

e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 1^{∞} als e-Fkt schreiben $= \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}} \underset{3.\text{Log-Gesetz}}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos(x))} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))}{2x}} \;\frac{"0"}{"0"} \underset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\quad}{2}} = e^{\left(\frac{\frac{-1-0}{1}}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$

äußere Abl. innere Abl.

$\left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\overbrace{-\cos(x)\cdot\cos(x)}^{u'\cdot v} - \overbrace{(-\sin(x))\cdot(-\sin(x))}^{u\cdot v'}}{\underbrace{\cos^2(x)}_{v^2}}$