



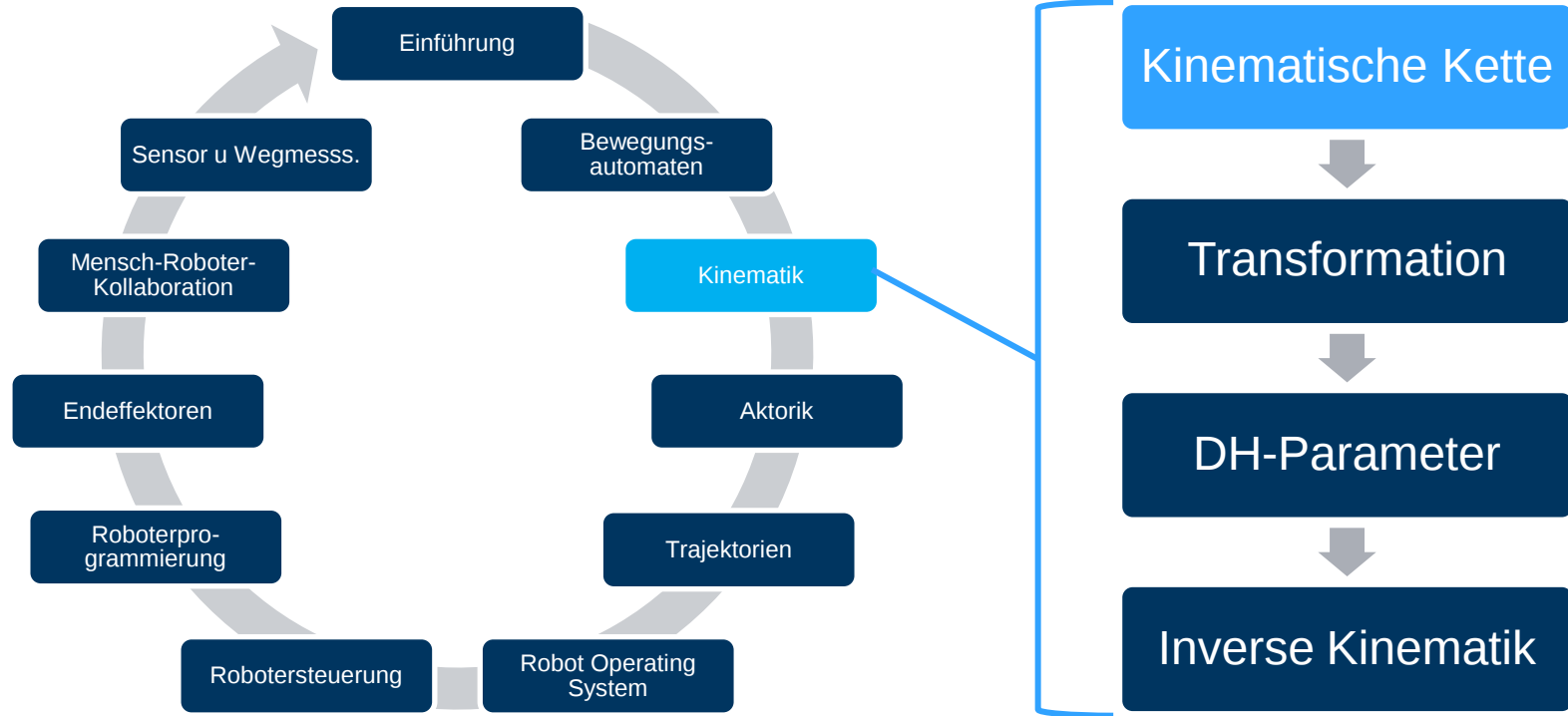
Technische Hochschule Georg Agricola

VORLESUNG - ROBOTIK

KINEMATIK

15.10.2025 Bochum

Dr.-Ing. Lars N. Josler

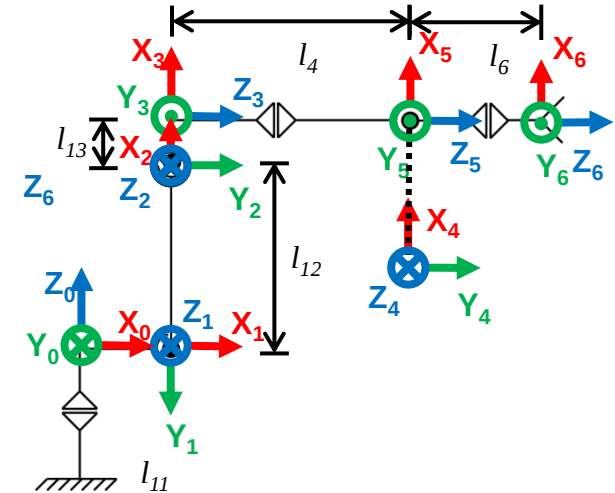


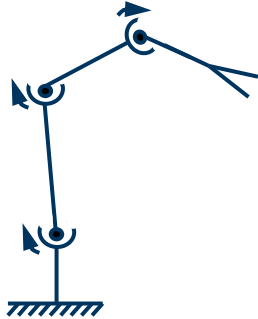
DEFINITION KINEMATIK



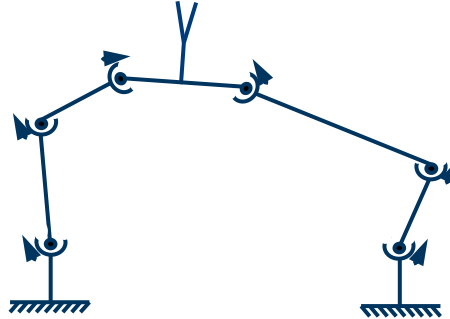
Untersuchung der *Bewegungsmöglichkeiten der Glieder* eines gegebenen Mechanismus relativ zueinander

- **Mechanismus:** Besteht aus einer Anzahl von starren Körpern (Glieder), die durch Gelenke verbunden sind.
- Ein Gelenk verbindet genau zwei Glieder.
- Ein Glied kann mehrere Gelenke haben.
- Zwei Glieder können durch mehrere Gelenke verbunden sein.
- Auftretende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Bewegung der Gelenke
- keine Betrachtung von Kräften
- **Kinematische Kette:** Kombination von Gliedern und Gelenken

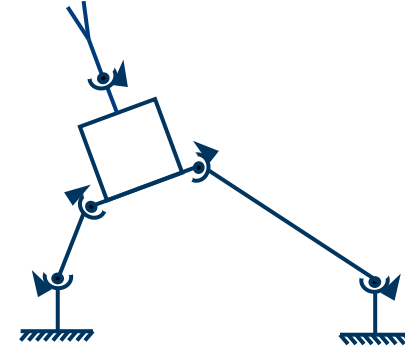




Offen



geschlossen



teilgeschlossen

Typ der kinematischen Kette	Eigenschaften	Bewegungsfreiheit	Vorteile	Nachteile
Offene Kette	Glieder sind hintereinander geschaltet, Endeffektor hängt direkt hinter dem letzten Gelenk	Hoch	Große Bewegungsfreiheit, einfache Steuerung	Fehlerfortpflanzung, Geringe Stabilität, weniger präzise Kraftübertragung
Teilgeschlossene Kette	Mehrere Glieder wirken gleichzeitig auf den Endeffektor	Mittel	Kombination aus Beweglichkeit und Stabilität, vielseitig einsetzbar	Komplexe Steuerung und Konstruktion
Geschlossene Kette	Glieder bilden einen geschlossenen Kreis, Bewegungen sind durch geometrische Zwangsbedingungen eingeschränkt	Eingeschränkt	Hohe Stabilität, präzise Kraftübertragung, kompakte Bauweise	Arbeitsraum kleiner, Komplexere mathematische Modellierung, eingeschränkte Beweglichkeit

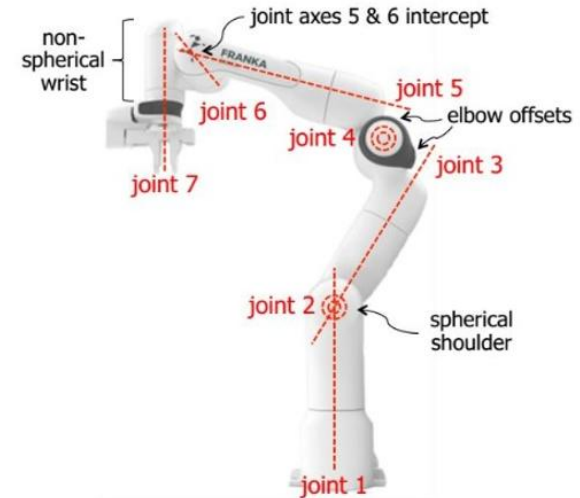
IR ALS OFFENE KINEMATISCHE KETTE



Industrieroboter werden meist als „offene kinematische Kette“ ausgeführt

Dabei Gilt:

- jedes Armteil ist über ein Schub- oder Drehgelenken mit dem nächsten Armteil verbunden
- jedes Gelenk besteht aus nur einer Gelenkachse
- jedes Armteil ist von Basis 0 (im Raum ruhend) bis zum letzten Armteil n durchnummeriert
- auf Armteil 0 folgt Gelenk 1, welches Armteil 1 bewegt, aber auch alle anderen Armteile ändern ihre räumliche Lage durch Gelenk 1
- Armteil n bewegt nur den Effektor



Quelle: [Robot Kinematics in a Nutshell](#)

IR MIT PARALLELKINEMATIKEN



Industrieroboter mit Parallelkinematik

Dabei Gilt:

- die Armteile der Hauptachsen sind über mehrere Schub- oder Drehgelenken mit dem nächsten Armteil verbunden
- komplexe Koordinatentransformation, hohe Rechnerleistung erforderlich
- sehr eingeschränkte Bewegungsmöglichkeiten

FANUC F-200i (Hexapod-Bauweise)



Adept Quattro



BESCHREIBUNG DER POSE DES ENDEFFEKTORS

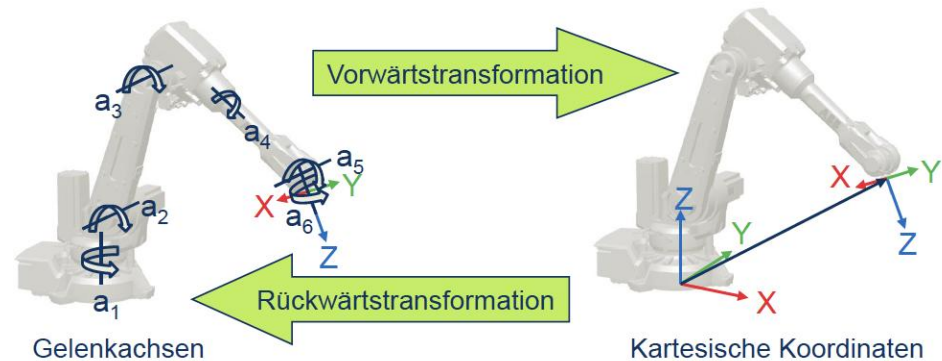


Angabe durch **Gelenkkoordinaten** (Achswinkel / Schublänge):

- Jeder Gelenkstellung muss ein numerischer Wert für Gelenkkoordinaten eindeutig zugeordnet sein.
- Positive Drehrichtung und Nulllage müssen eindeutig festgelegt sein (siehe auch Kalibrierung).
- Stellung des Roboterarms eindeutig bestimmt

Angabe durch **kartesische** Koordinaten:

- Stellung des Roboterarms nicht eindeutig bestimmt
- Mehrdeutigkeiten
- Singularitäten



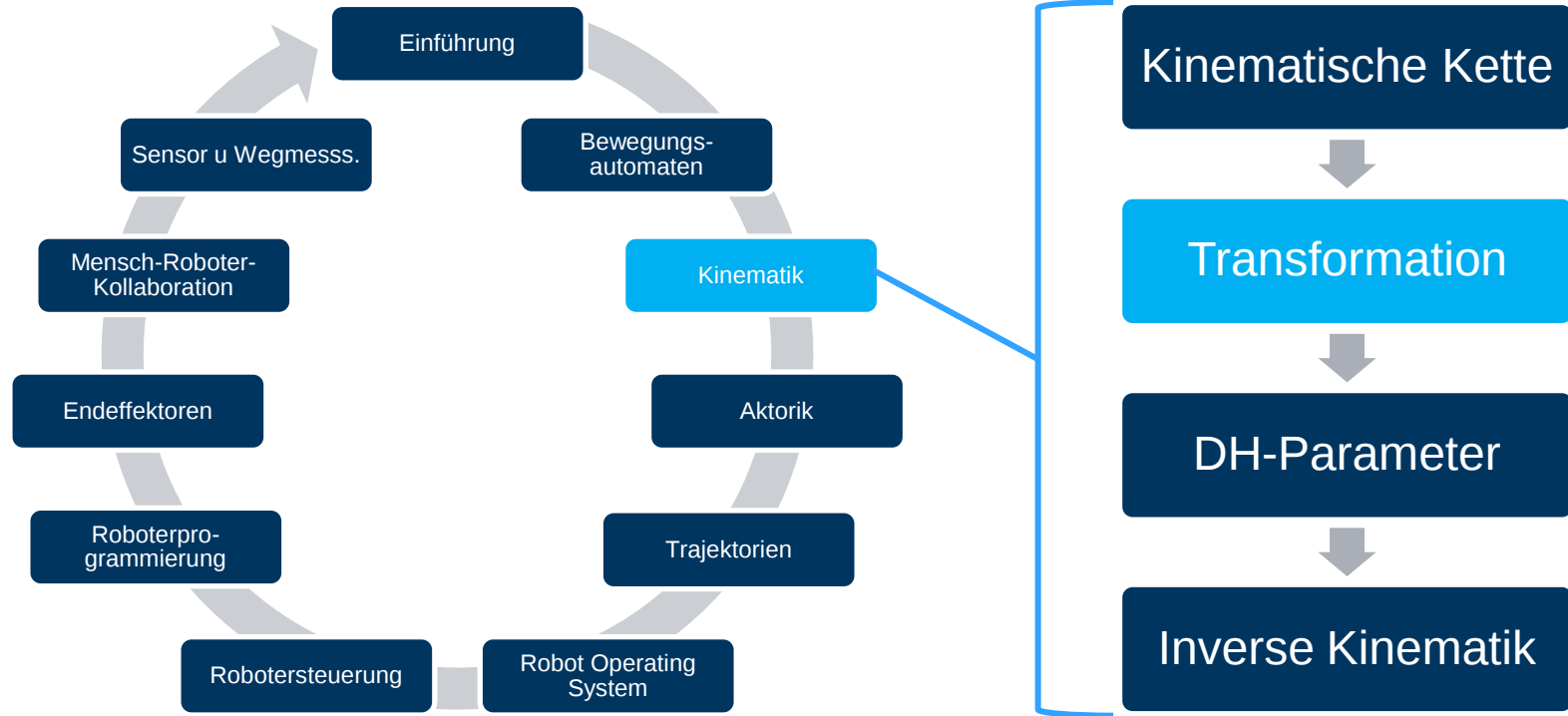
VERWENDUNG KARTESISCHER UND GELENKKOORDINATEN



- Gelenkkoordinaten vermeiden Probleme wie Singularitäten und Mehrdeutigkeiten
- Kartesische Koordinaten haben semantische Vorteile:



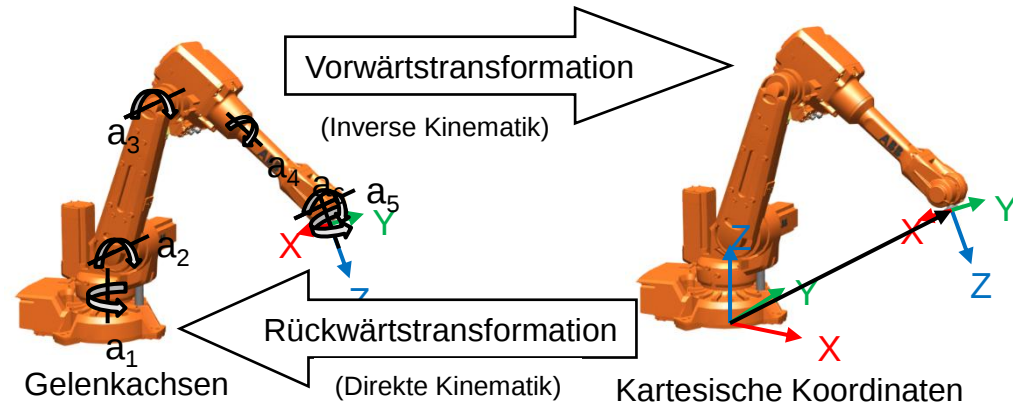
Quelle: AAB



VORWÄRTS- UND RÜCKWÄRTSTRANSFORMATION



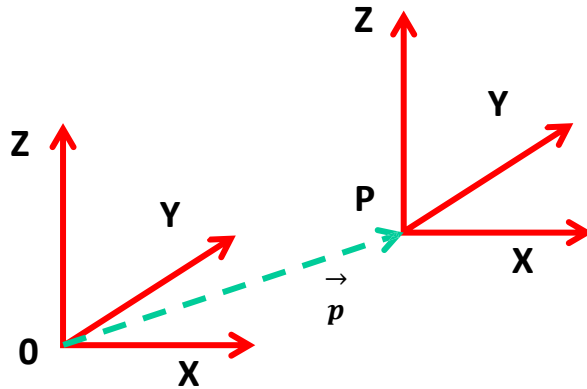
- **Umrechnung zwischen Gelenkkoordinaten und kartesischen Koordinaten**
 - Vorwärtstransformation
 - Position und Orientierung werden aus den bekannten Achswinkeln bestimmt
 - Mathematisch eindeutig
 - Rückwärtstransformation
 - Achswinkel werden aus Position und Orientierung bestimmt
 - Mehrdeutigkeiten: es kann keine, eine, oder mehrere Lösungen geben



TRANSFORMATION

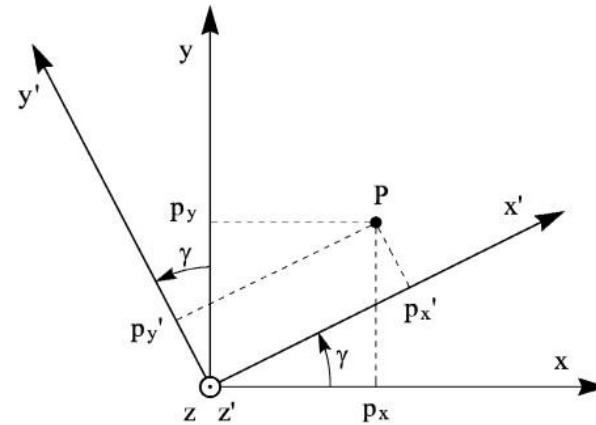


Translation



$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Rotation



$$R(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

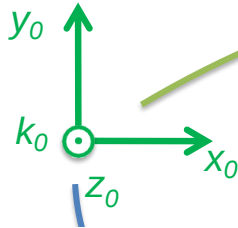
$$R(Y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

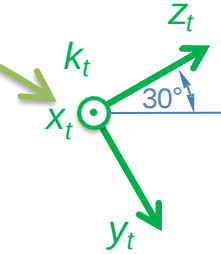
TRANSFORMATION



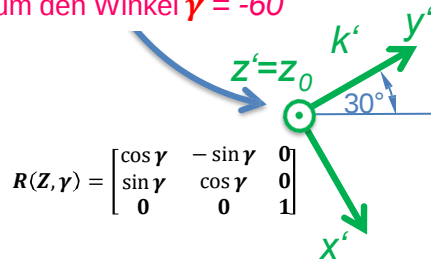
Basiskoordinatensystem



Zielkoordinatensystem „t“



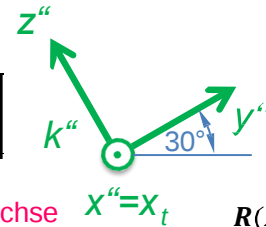
Drehung um die Z-Achse
um den Winkel $\gamma = -60^\circ$



$$R(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(Y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Drehung um die Y'-Achse
um den Winkel $-\beta = -90^\circ$
(Vorzeichen beachten.
 x'' soll schon Lage von x_t haben)



Drehung um die X''-Achse
um den Winkel $\alpha = -90^\circ$

$$R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Hilfskoordinatensystem k'

Hilfskoordinatensystem k''



Homogene Transformationsmatrizen

- Darunter versteht man 4 x 4 -Matrizen, die außer der Rotation auch die Verschiebung (Translation) und andere Arten der geometrischen Transformationen repräsentieren können.

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & \vec{p}_{3 \times 1} \\ \hline \vec{f}_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Rotations} \\ \text{matrix} & \text{Positionsvektor} \\ \hline \text{Perspektiv} \\ \text{transformation} & \text{Skalierungsfaktor} \end{array} \right]$$

$$\vec{f} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$w = 1$$

BESCHREIBUNG VON KOORDINATENSYSTEMEN UND TRANSFORMATIONEN



- **Repräsentation der Lage (Translation / Verschiebung) relativ einfach über Vektoren**
- **Verschiedene Standards zur Repräsentation der Orientierung (Rotation)**
 - Euler-Winkel: 3 Rotationswinkel um 3 Achsen
(12 unterschiedliche Konventionen, z.B. ZYX, ZYZ, ...)
 - Quaternionen: Rotationswinkel um angegebene Achse
- **Zusammenfassung von Rotation und Translation in Homogenen Transformationen**

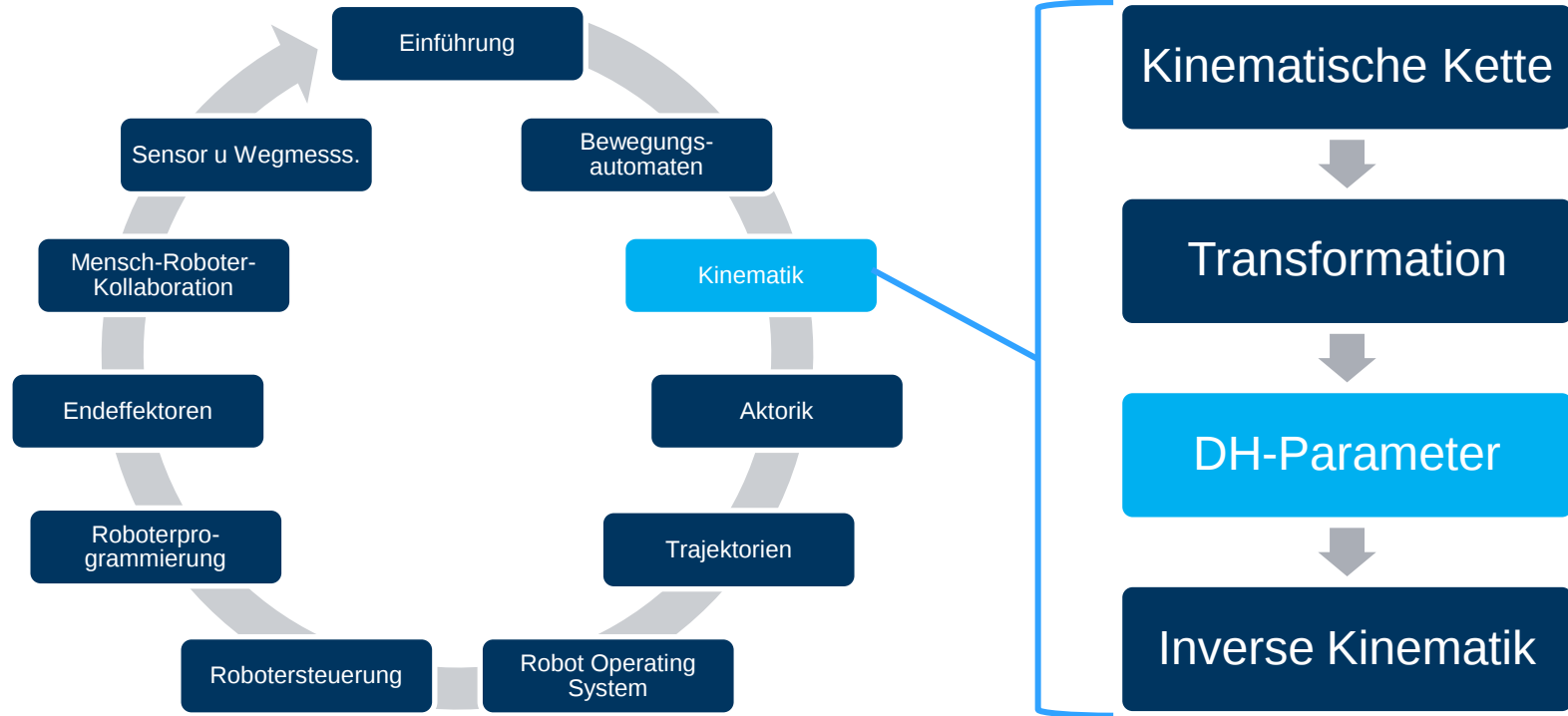
$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{Z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{Y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



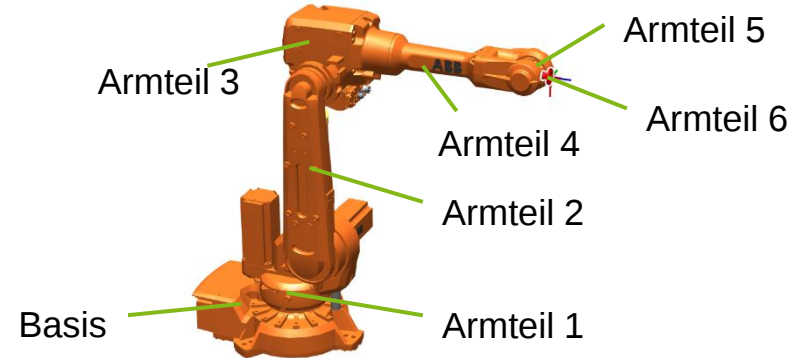


- **Zur Bewegungsplanung wird eine vollständige Beschreibung der Lage aller Armteile benötigt (z.B. Vermeidung von Kollisionen)**
- **Übliche Beschreibungsform: Denavit-Hartenberg-Konvention**
 - Für die Roboter Basis und jedes Armteil wird ein Koordinatensystem festgelegt
 - Im Allgemeinen würden 6 Parameter zur Beschreibung der relativen Lage benötigt (3 Translation / 3 Rotation)
 - Denavit-Hartenberg-Konvention beschreibt relative Lage zweier benachbarter Koordinatensysteme mit 4 Parametern (DH-Parameter)
 - Bei Robotern mit offener kinematischer Kette 3 Parameter konstant und 1 Parameter entspricht Gelenkkoordinaten

DENAVIT-HARTENBERG PARAMETER



- **Standardisiertes Vorgehen:**
 1. Festlegung der Koordinatensysteme
 2. Festlegung der DH-Parameter
 3. Festlegung der DH-Transformationen
- Nummerierung der Armteile beginnt mit der Basis (Armteil 0)
- Gelenke sind von 1 bis n nummeriert
- Das letzte Armteil n heißt Endeffektor

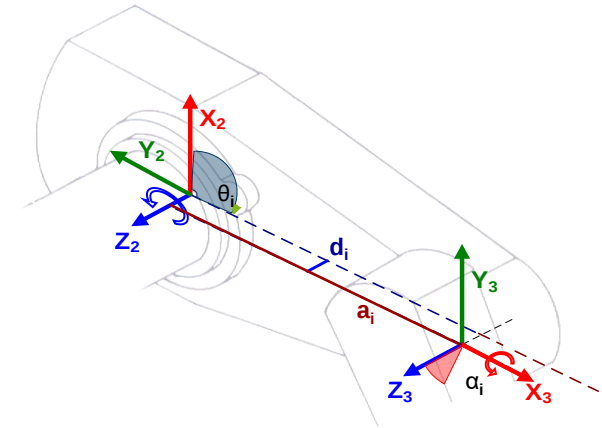


DENAVIT-HARTENBERG PARAMETER



Zwei benachbarte DH-Koordinatensysteme können durch zwei Translationen und zwei Rotationen ineinander überführt werden

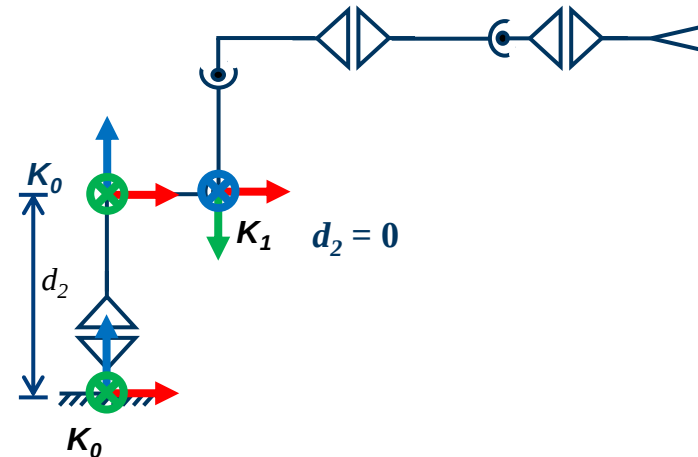
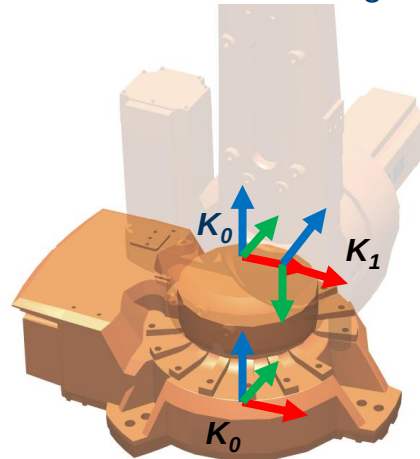
1. θ_i = Winkel zwischen x_i und x_{i-1} rotiert um z_{i-1}
(Überführung von x_{i-1} in x_i durch Rotation um z_{i-1})
2. d_i = Minimaler Abstand zwischen K_i und K_{i-1} entlang z_{i-1}
(Wert positiv oder negativ)
3. a_i = Abstand zwischen K_i und K_{i-1} entlang der x_i -Achse
(immer positiv)
4. α_i = Winkel zwischen z_i und z_{i-1} rotiert um x_i
(Überführung von z_{i-1} in z_i durch Rotation um x_i)



DENAVIT-HARTENBERG PARAMETER



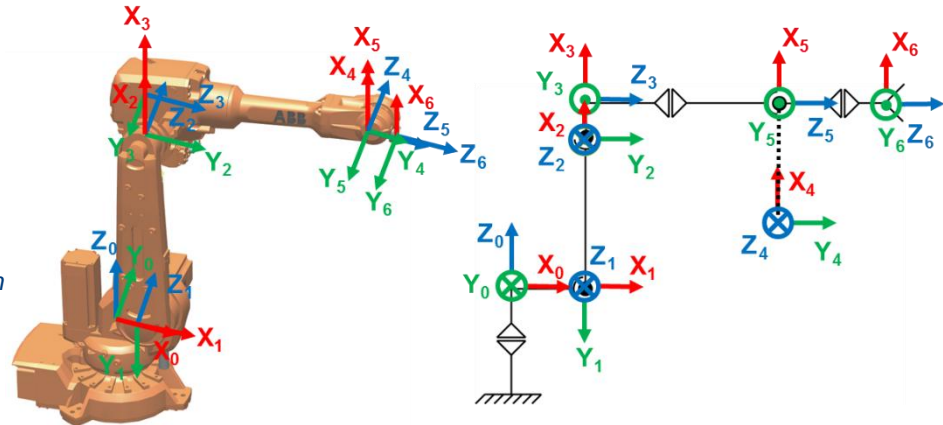
- Festlegung der Koordinatensysteme erfolgt nach festen Regeln
- Eventuelle Wahlfreiheit
 - Koordinatensysteme werden primär durch die Z-Achse definiert, die Lage der X- und Y-Achse kann manchmal frei sein
 - Nutzung der Wahlfreiheit zur Eliminierung der DH-Parameter (→ gleich Null werden)



DENAVIT-HARTENBERG PARAMETER



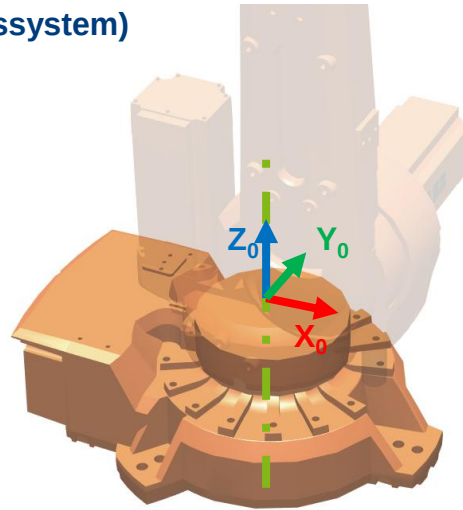
- Jedes Armteil i ($i=0, 1 \dots n$) eines Roboters mit n Gelenken wird mit einem Koordinatensystem K_i versehen
- K_i ist mit dem Armteil i fest verbunden
- K_i bewegt sich relativ zu Armteil i nicht
- Ursprung von K_i liegt auf der Achse $i+1$
- Vorgehen:
 1. Festlegung des Basiskoordinatensystems K_0
 2. Festlegung der Koordinatensysteme K_i ($i=1, 2, \dots, n-1$)
 3. Festlegung des Koordinatensystems K_n



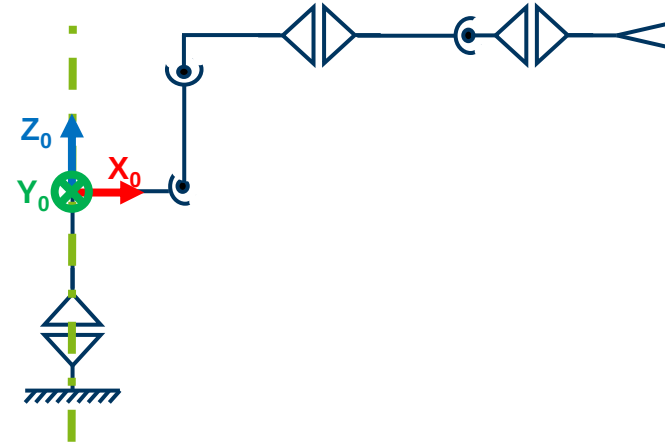
FESTLEGUNG DES BASISKOORDINATENSYSTEMS K_0



- K_0 heißt Basiskoordinatensystem
- K_0 ist fest mit der Basis (Armteil 0, Sockel) verbunden
- Ursprung von K_0 liegt auf der ersten Gelenkachse
- die z_0 Achse zeigt entlang der ersten Gelenkachse
- x_0, y_0 frei wählbar (Rechtssystem)



Gelenkachse 1

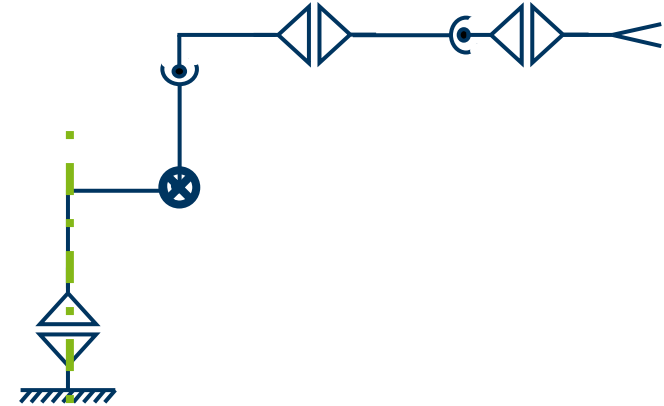
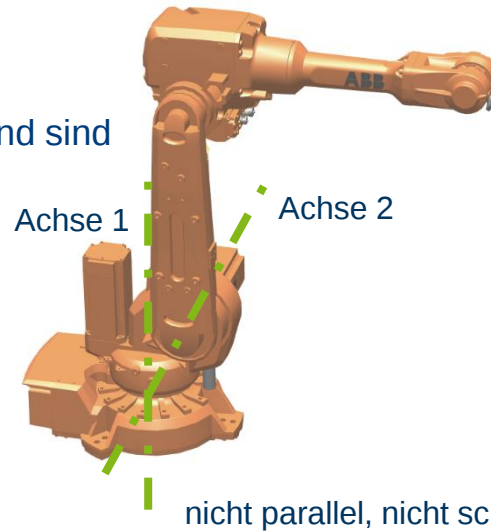


FESTLEGUNG DER KOORDINATENSYSTEME

$K_i (i=1, 2, \dots, N-1)$



- Allgemein gilt: Der Ursprung von K_i liegt auf Gelenkachse $i+1$
- Unterscheidung: Gelenkachsen i und $i+1$
 - schneiden sich
 - sind parallel
 - schneiden sich nicht und sind nicht parallel

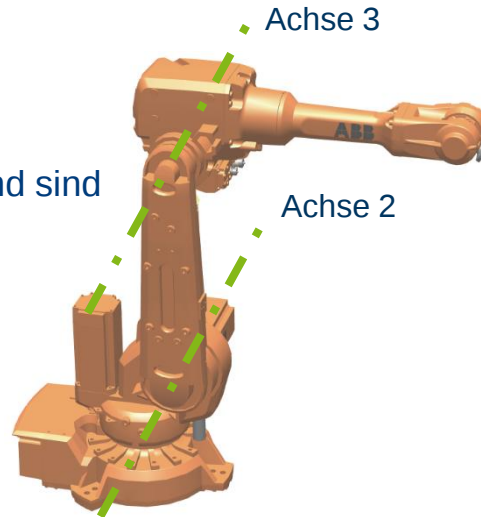


FESTLEGUNG DER KOORDINATENSYSTEME

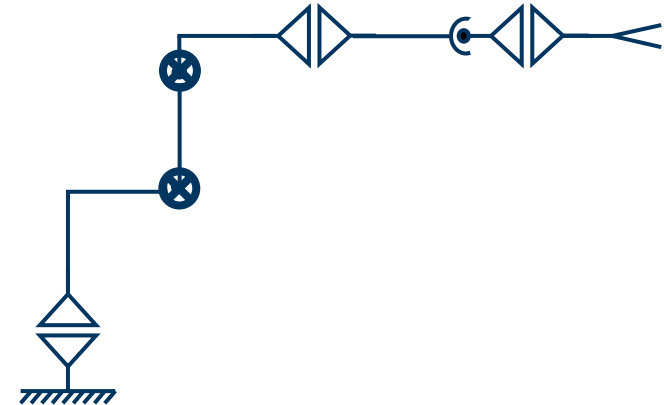
$K_i (i=1, 2, \dots, N-1)$



- Allgemein gilt: Der Ursprung von K_i liegt auf Gelenkachse $i+1$
- Unterscheidung: Gelenkachsen i und $i+1$
 - schneiden sich
 - sind parallel
 - schneiden sich nicht und sind nicht parallel



parallel, nicht schneidend

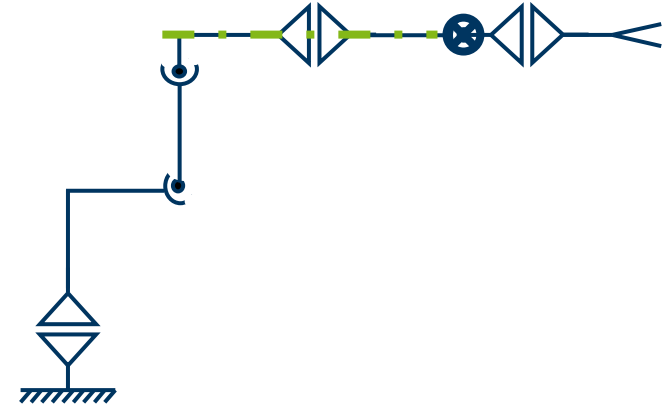
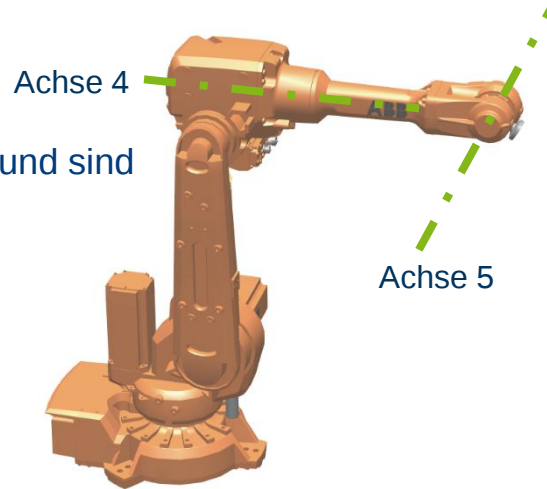


FESTLEGUNG DER KOORDINATENSYSTEME

$K_i (i=1, 2, \dots, N-1)$



- Allgemein gilt: Der Ursprung von K_i liegt auf Gelenkachse $i+1$
- Unterscheidung: Gelenkachsen i und $i+1$
 - schneiden sich
 - sind parallel
 - schneiden sich nicht und sind nicht parallel

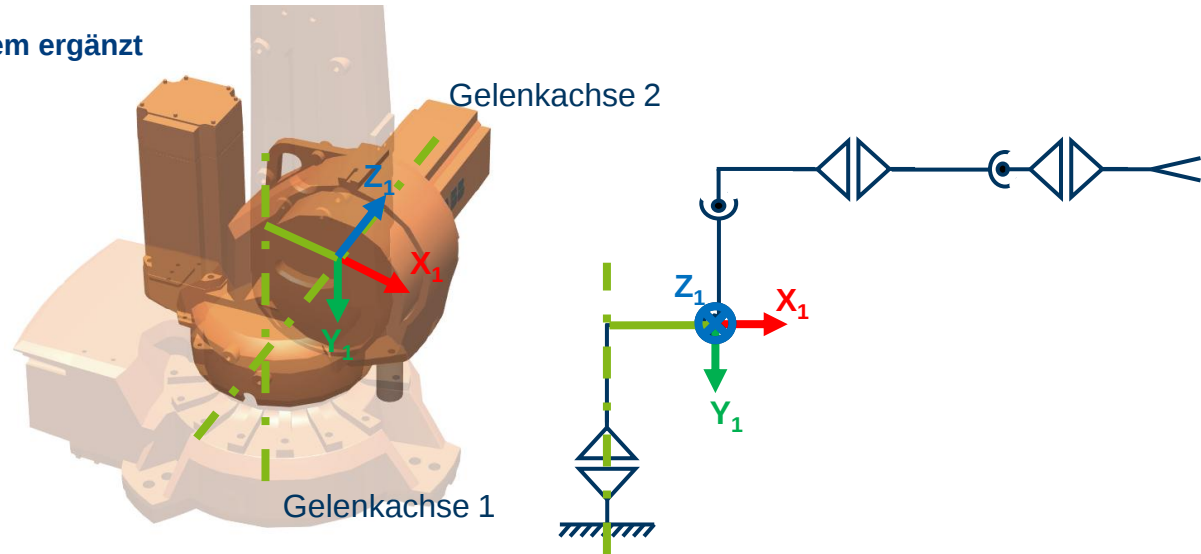


nicht parallel, schneidend

NICHT SCHNEIDENDE, NICHT PARALLELE GELENKACHSEN I UND I+1 ($i = 1$)



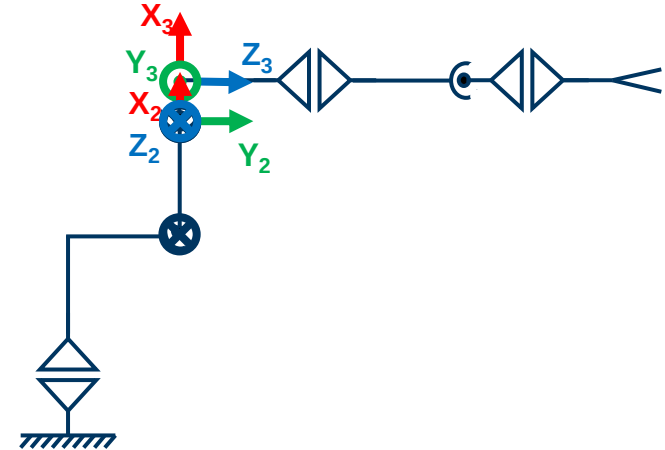
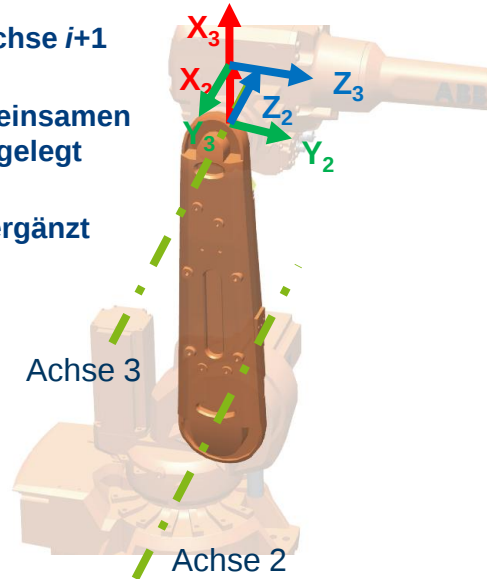
- Bestimmung der gemeinsamen Normalen von i und $i+1$
- Ursprung von K_i liegt im Schnittpunkt der Normalen zwischen den beiden Gelenkachsen und Achse $i+1$
- Die z_i Achse wird entlang der Gelenkachse $i+1$ gelegt (2 Mgl.)
- Die x_i Achse wird in Richtung der gemeinsamen Normalen der Gelenkachsen i und $i+1$ gelegt (von Gelenkachse i zu Achse $i+1$)
- Die y_i Achse wird zum Rechtssystem ergänzt



PARALLELE ACHSEN I UND I+1 ($I = 2$)



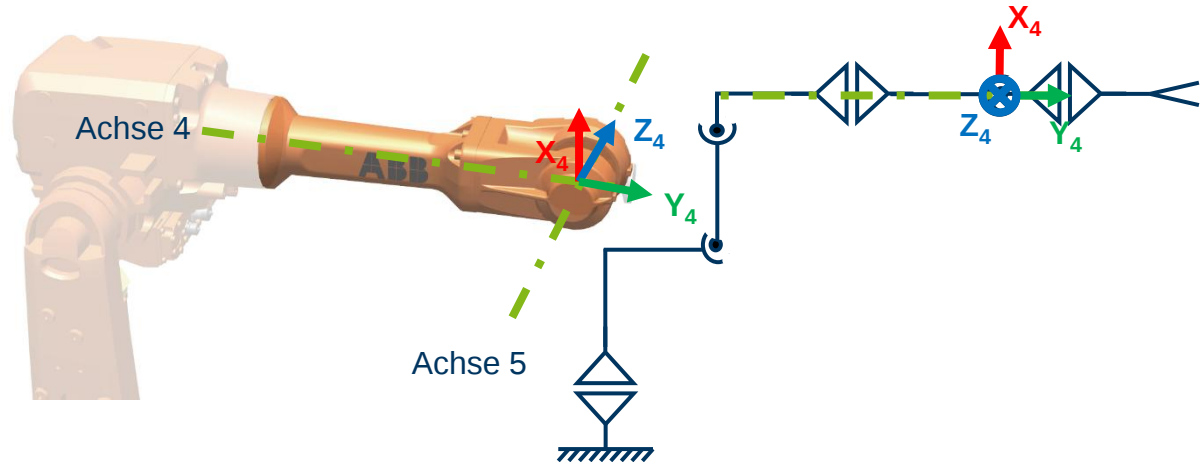
- Zunächst Festlegung von K_{i+1} , Schnittpunkt der gemeinsamen Normalen und Achse $i+1$
- Ursprung von K_i liegt auf Gelenkachse $i+1$, so dass Abstand zu K_{i+1} minimal
- Die z_i Achse wird entlang der Gelenkachse $i+1$ gelegt (2 Mgl.)
- Die x_i Achse wird in Richtung der gemeinsamen Normalen der Gelenkachsen i und $i+1$ gelegt (von Gelenkachse i zu Achse $i+1$)
- Die y_i Achse wird zum Rechtssystem ergänzt



SCHNEIDENDE GELENKACHSEN / UND $i+1$ ($i = 4$)



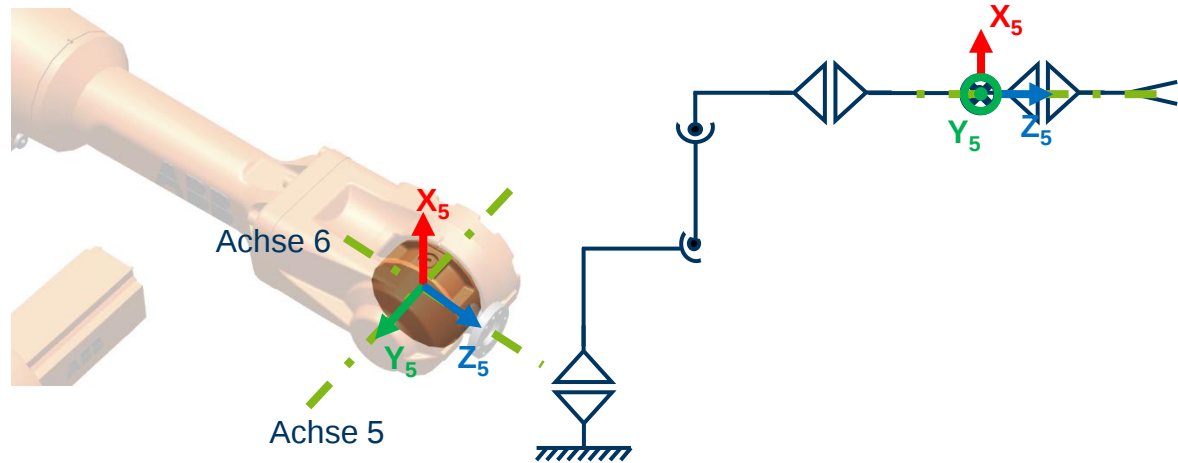
- Ursprung von K_i liegt im Schnittpunkt beider Gelenkachsen
- Die z_i Achse wird entlang der Gelenkachse $i+1$ gelegt (2 Mgl.)
- Die x_i Achse wird senkrecht zu den beiden Gelenkachsen gelegt (2 Mgl.)
- Die y_i Achse wird zum Rechtssystem ergänzt



SCHNEIDENDE GELENKACHSEN / UND $i+1$ ($i = 5$)



- Ursprung von K_i liegt im Schnittpunkt beider Gelenkachsen
- Die z_i Achse wird entlang der Gelenkachse $i+1$ gelegt (2 Mgl.)
- Die x_i Achse wird senkrecht zu den beiden Gelenkachsen gelegt (2 Mgl.)
- Die y_i Achse wird zum Rechtssystem ergänzt

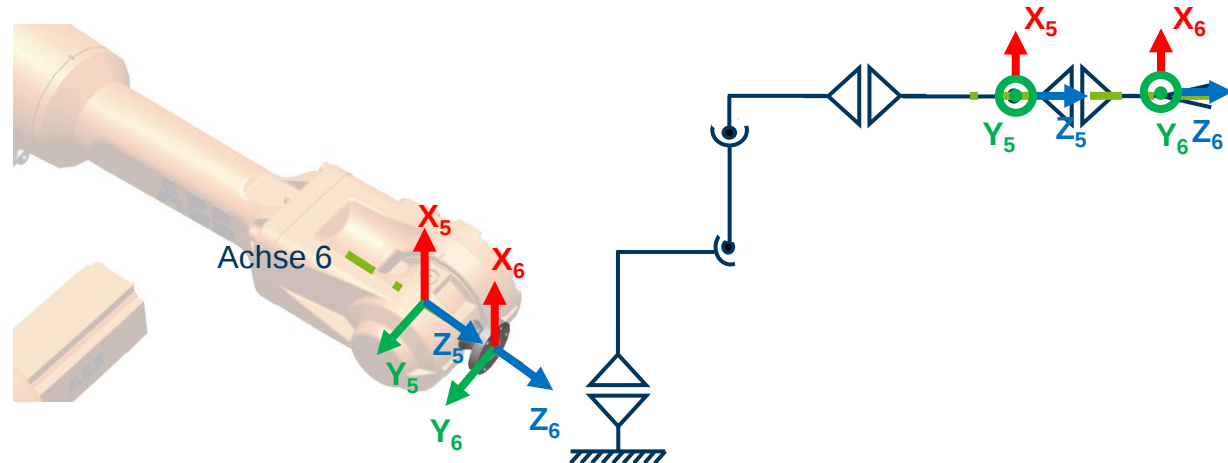


FESTLEGUNG DES KOORDINATENSYSTEMS

$K_N (N = 6)$



- Ursprung von K_i liegt im Schnittpunkt beider Gelenkachsen
- Die z_i Achse wird entlang der Gelenkachse $i+1$ gelegt (2 Mgl.)
- Die x_i Achse wird senkrecht zu den beiden Gelenkachsen gelegt (2 Mgl.)
- Die y_i Achse wird zum Rechtssystem ergänzt



FESTLEGUNG DER DH-PARAMETER



- θ_i = Winkel um z_{i-1} , der x_{i-1} in x_i dreht
- d_i = Minimaler Abstand zwischen K_i und K_{i-1} entlang z_{i-1}
- a_i = Abstand zwischen K_i und K_{i-1} entlang x_i
- α_i = Winkel um x_i , der z_{i-1} in z_i dreht

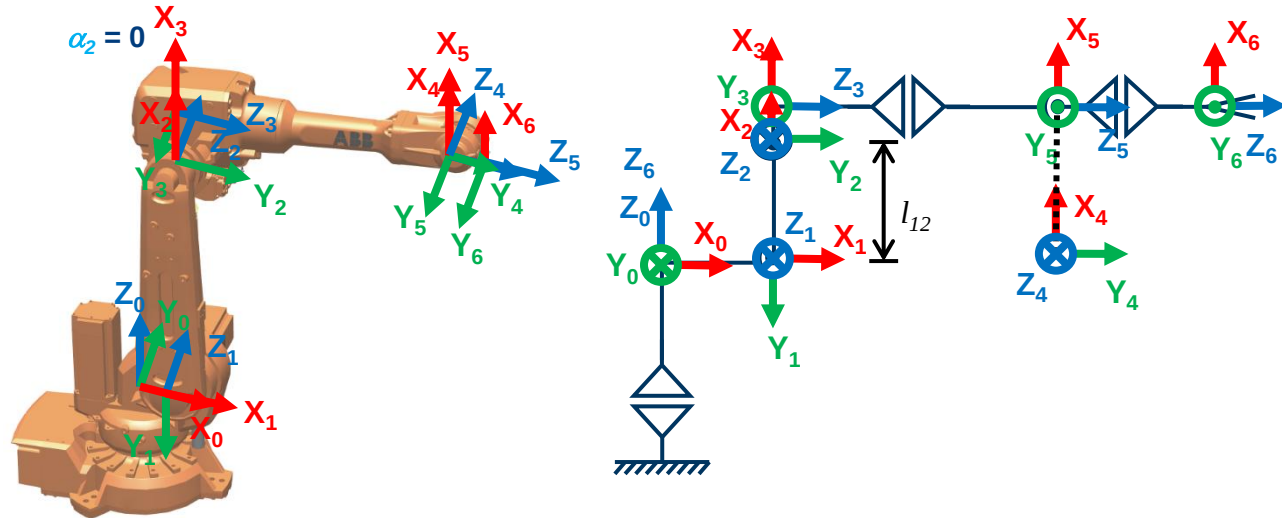
Beispiel: $i = 2$

$$\theta_2 = -90^\circ$$

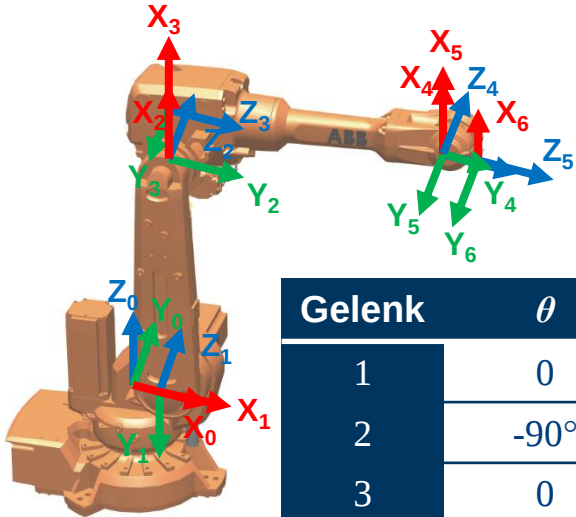
$$d_2 = 0$$

$$a_2 = l_{12}$$

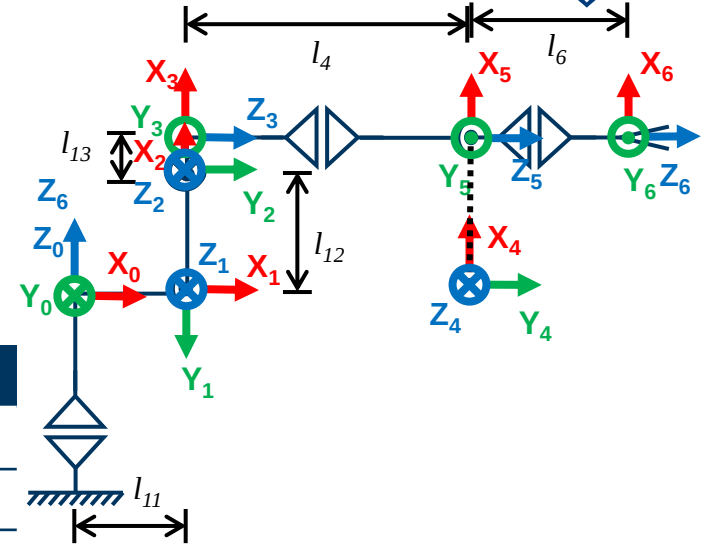
$$\alpha_2 = 0$$



FESTLEGUNG DER DH-PARAMETER



Gelenk	θ	d_i	a_i	α_i
1	0	0	l_{11}	-90°
2	-90°	0	l_{12}	0
3	0	0	l_{13}	-90°
4	0	l_4	0	90°
5	0	0	0	-90°
6	0	l_6	0	0



BESTIMMUNG DER DH-TRANSFORMATIONEN



- θ_i = Winkel zwischen x_i und x_{i-1} rotiert um z_{i-1}
- d_i = Minimaler Abstand zwischen K_i und K_{i-1} entlang z_{i-1}

$$R(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a_i = Abstand zwischen K_i und K_{i-1} entlang x_i
- α_i = Winkel zwischen z_i und z_{i-1} rotiert um x_i

$$R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \rightarrow {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & s \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$${}_{i-1}^iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



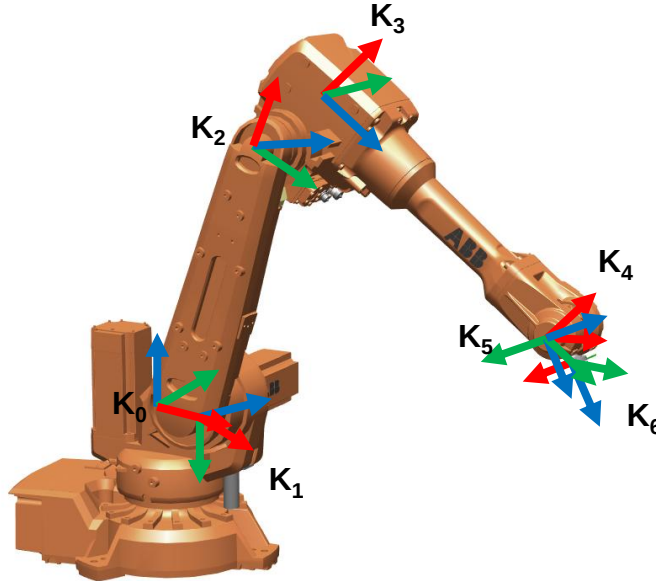
- Aus den vier elementaren Transformationen abgeleitete resultierende homogene Transformationsmatrix

$${}_{i-1}^iT = Rot(z_{i-1}, \theta_i) \cdot Trans(0, 0, d_i) \cdot Trans(a_i, 0, 0) \cdot Rot(x_i, \alpha_i)$$
$${}_{i-1}^iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Die Matrizen ${}_{i-1}^iT$, $i=0, \dots, n$ werden als Denavit-Hartenberg-Matrizen bezeichnet
- Hintereinanderausführung aller DH-Matrizen führt zur TCP-Matrix T_w (Vorwärtstransformation) $T_W = {}_0^nT = {}_0^1T \cdot {}_1^2T \cdot {}_2^3T \cdots {}_{n-1}^nT$

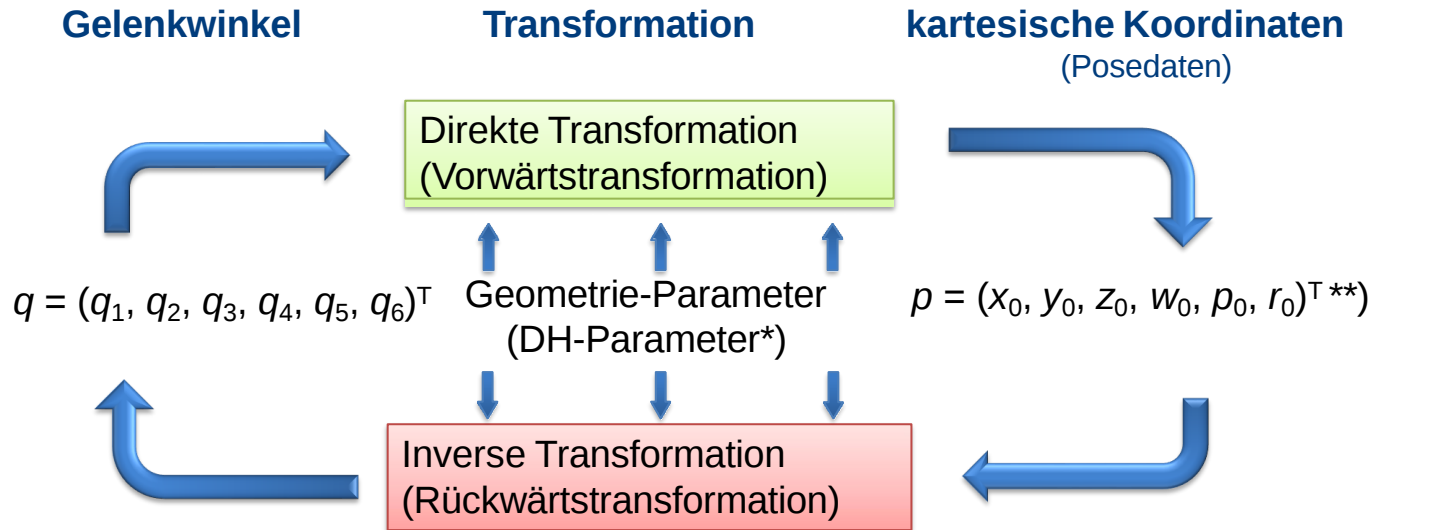


- Bei bekannten DH-Parametern lassen sich zu gegebenen Achswerten die entsprechenden kartesischen Positionen berechnen



$$T_W = {}^6_0T = {}^1_0T \cdot {}^2_1T \cdot {}^3_2T \cdot {}^4_3T \cdot {}^5_4T \cdot {}^6_5T$$

ZUSAMMENFASSUNG

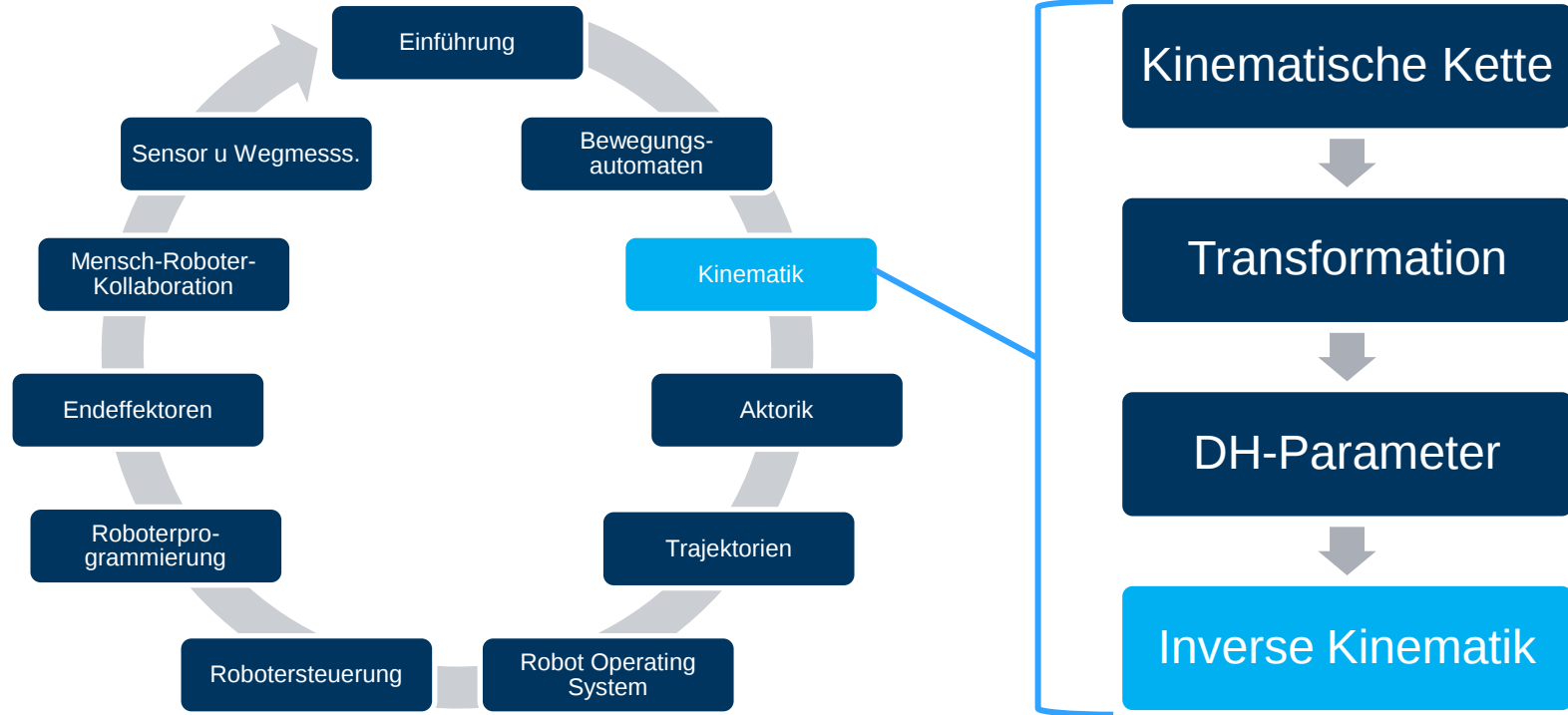


*) DH-Parameter = Denavit-Hartenberg-Parameter
nach Jacques Denavit und Richard S. Hartenberg: *Kinematic Synthesis of Linkages*, 1964

**) vollständige Poseangaben: $p = x, y, z,$ Lage, (Location)
 $w, p, r,$ Orientierung, (Orientation)
'Conf' Konfiguration (Configuration)



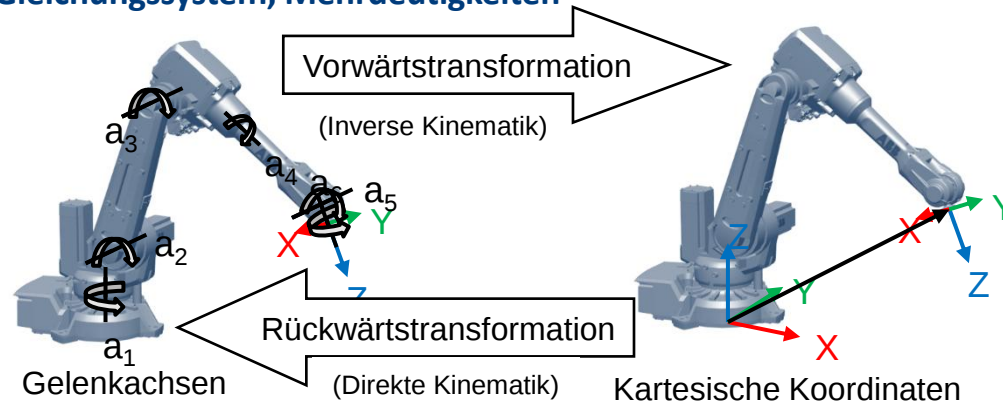
- **Direktes kinematische Problem**
- **Welche Position und Orientierung nimmt der Effektor bezogen auf die Roboterbasis für eine gegebene Gelenkkonfiguration ein?**
- **Lösung: direkte kinematische Transformation oder Vorwärtstransformation**
- **Denavit-Hartenberg (DH) Parameter und DH Transformation Explizit, analytisch lösen**



INVERSES KINEMATISCHES PROBLEM



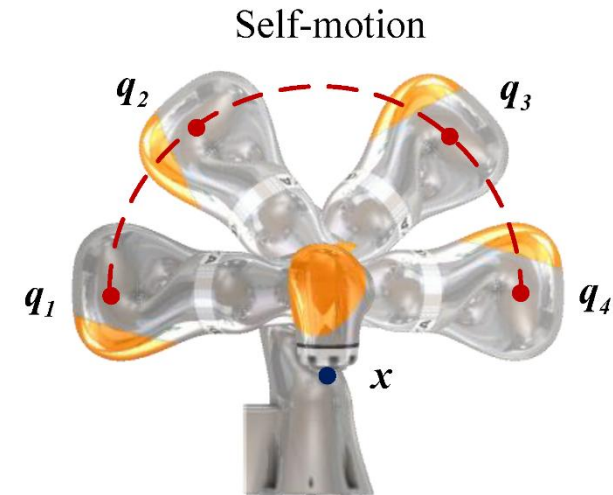
- Welche Gelenkkonfiguration führt auf die vorgegebene Lage des Effektors (Position und Orientierung TCP)?
 - Lösung: inverse kinematische Transformation oder **Rückwärtstransformation** Analytische Verfahren (algebraische, geometrische)
- Numerische Verfahren (Suche)
- Unterbestimmtes Gleichungssystem, Mehrdeutigkeiten



LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN BEI INVERSER KINEMATIK



- **Fälle:**
 - Es existiert eine eindeutige Lösung.
 - Es existiert eine endliche Menge von Lösungen.
 - Es existiert eine unendliche Menge von Lösungen.
 - Es existiert keine Lösung.
- **Lösungsmenge ist abhängig von:**
 - Anzahl der gelenke
 - Linkparameter
 - Erlaubtem Bewegungsbereich der Gelenke



AUSWAHLKRITERIEN FÜR ROBOTERPOSEN



- **Beachtung möglicher Hindernisse**
- **Bestmögliche Lösung bestimmen**
 - Nächste Lösung, dadurch Minimierung der Bewegung der Gelenke
 - Vermeidung von Singularitäten
 - Vermeiden von mechanischen Grenzen
 - Berücksichtigung von Gewichten oder Dynamik der Glieder



- **Geometrisch:**

- Bei bekannter Geometrie des Roboters wird versucht, die Gelenkwinkel direkt aus den Positionsbeziehungen abzuleiten.
 - Vorteil: Schnell, effizient
 - Nachteil: Nur für spezielle (einfache) Robotertypen (z. B. planare 2D-Arme)

- **Algebraisch:**

- Durch Invertierung der direkten Kinematik wird versucht, eine Lösung algebraisch zu ermitteln.
 - Vorteil: Liefert exakte Lösungen bei lösbaren Systemen
 - Nachteil: Komplexe Robotergeometrien führen zu schwer lösbaren Gleichungen oder mehreren Lösungen

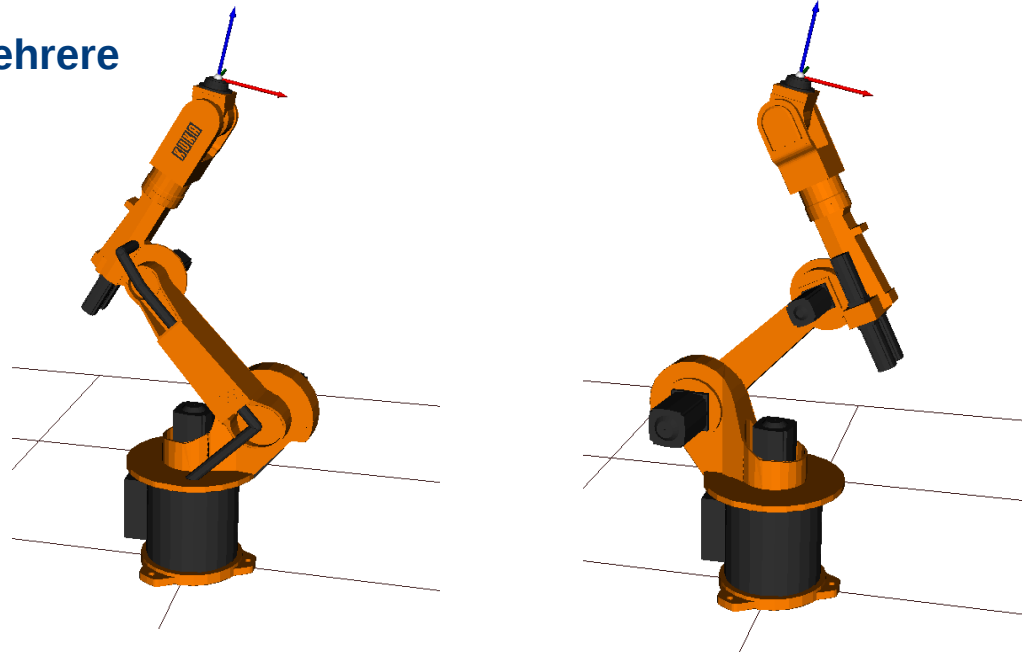
- **Numerisch:**

- Iterative Ermittlung von Gelenkparametern mithilfe von Optimierungsverfahren (z. B. Newton-Raphson, Gradient Descent).
 - Vorteil: Allgemeines Verfahren, auch für komplexe oder redundante Roboter
 - Nachteil: Rechenintensiv, anfällig für lokale Minima/Maxima, benötigt gute Startwerte

MEHRDEUTIGKEITEN (KONFIGURATIONEN)



- Einer kartesischen Position können mehrere Stellungen der Gelenkwinkel entsprechen

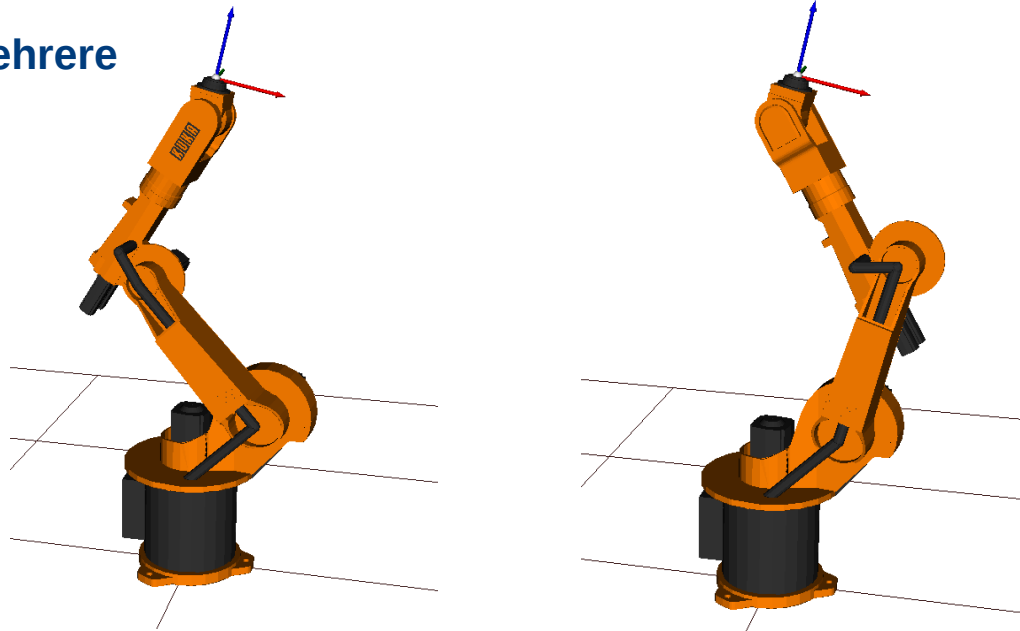


Unterschied: Position der 1. und 6. Achse

MEHRDEUTIGKEITEN (KONFIGURATIONEN)



- Einer kartesischen Position können mehrere Stellungen der Gelenkwinkel entsprechen

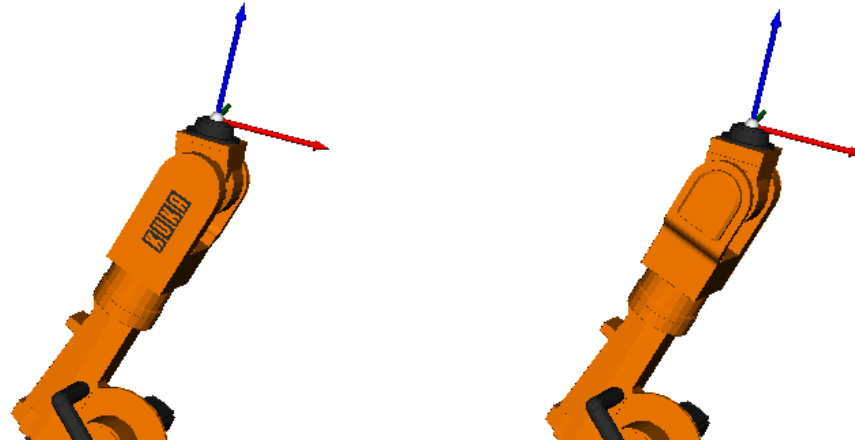


Unterschied: Position der 2., 3. und 4. Achse

MEHRDEUTIGKEITEN (KONFIGURATIONEN)



- Einer kartesischen Position können mehrere Stellungen der Gelenkwinkel entsprechen



Unterschied: Position der 4. und 5. Achse

SINGULARITÄTEN



Quelle: [Intro2Robotics Lecture 14a: Manipulator Singularities](#)

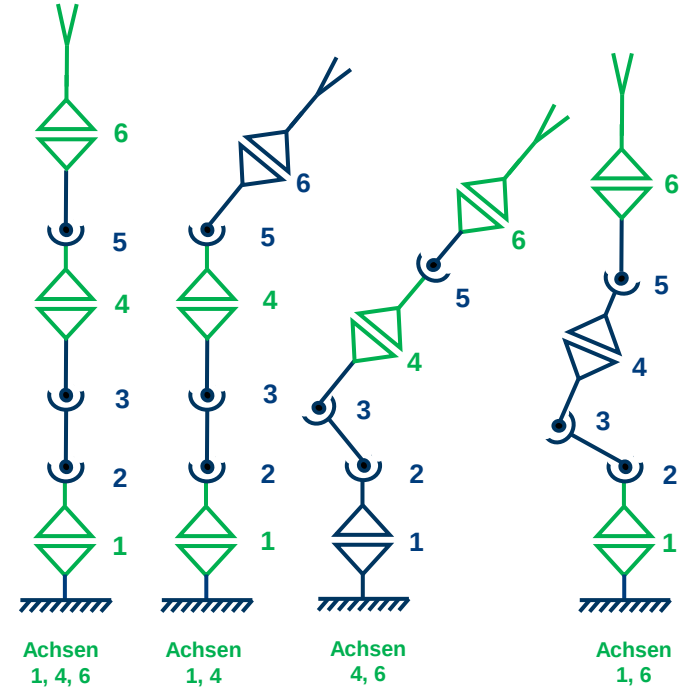


- Eine Singularität bei Robotern bezeichnet eine geometrische Konfiguration, in der der Roboter seine Bewegungen nicht eindeutig berechnen oder kontrollieren kann. Dies führt zu Problemen bei der Bahnplanung, Steuerung und Genauigkeit.
 - Wenn Jacobi-Matrix des Roboters nicht mehr invertierbar ist
- **Dadurch gekennzeichnet und erkennbar, dass zwei oder mehr Achsen des Roboters kollinear (fluchtend) sind**
 - Der Roboter verliert eine oder mehrere Freiheitsgrade in der Bewegung seines Endeffektors.
 - Die Bewegungsrichtung ist nicht mehr eindeutig bestimmbar, was zu unkontrollierten oder extrem schnellen Gelenkbewegungen führen kann.
 - Die numerische Berechnung der Gelenkwinkel wird instabil oder mehrdeutig.

INNERE SINGULARITÄTEN



- Singuläre Achsstellungen eines 6-Achs-Knickarmroboters



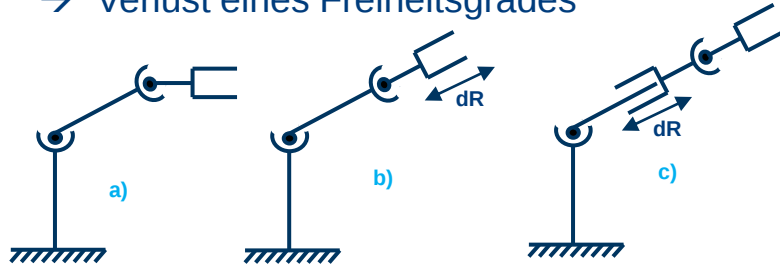
ARTEN VON SINGULARITÄTEN



Randsingularitäten:

- Durch völlige Streckung des Armes werden die Bewegungsmöglichkeiten eingeschränkt.
- Der Endeffektor kann nicht radial bewegt werden.

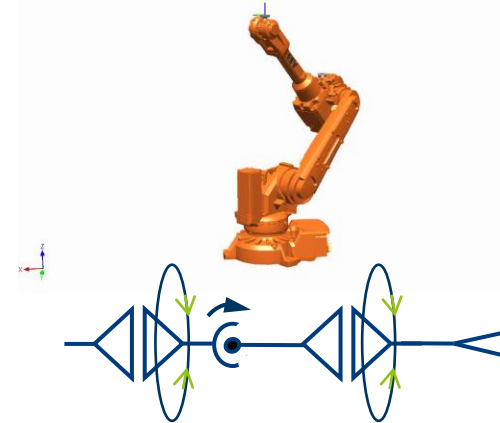
→ Verlust eines Freiheitsgrades



- a) Nicht-singuläre Stellung,
- b) Randsingularität am äußeren Rand des Arbeitsraumes
- c) Randsingularität am inneren Rand des Arbeitsraumes

Innere Singularitäten:

- Mehrere Achsen sind wirkungsgleich (kollinear).
- Verlust eines Freiheitsgrades



Quelle: Wüst