



Technische Hochschule Georg Agricola

VORLESUNG - ROBOTIK

TRAJEKTORIEN

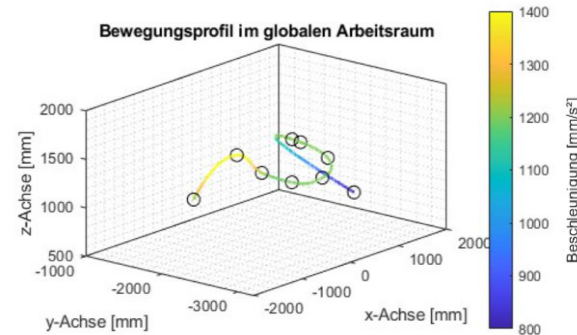
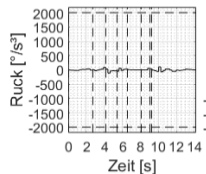
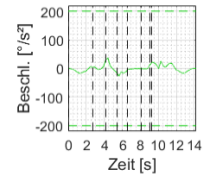
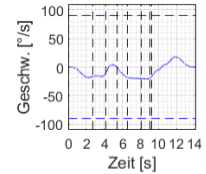
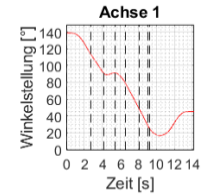
22.10.2025 Bochum

Dr.-Ing. Lars N. Josler

DEFINITION TRAJEKTORIE



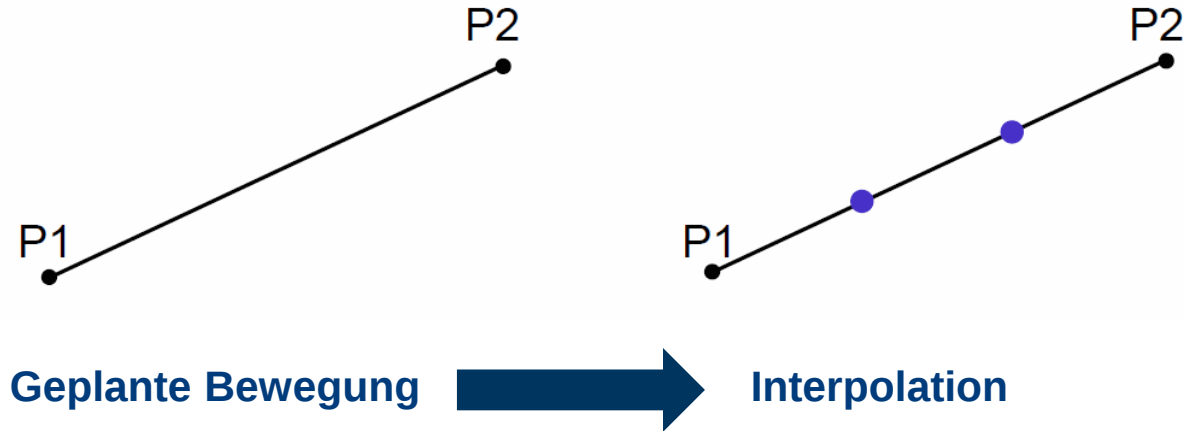
- **Trajektorie beschreibt den zeitabhängigen Verlauf der Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Orientierung eines Roboters oder seiner Gelenke im Raum – meist als kontinuierliche Funktion über die Zeit**
 - nicht nur ein geometrischer Pfad, sondern eine zeitparametrisierte Bewegung
 - Gelenkraum-Trajektorie (Joint Space Trajectory)
 - Bewegung wird über die Gelenkwinkel definiert – relevant für die Steuerung einzelner Achsen.
 - Arbeitsraum-Trajektorie (Task Space Trajectory)
 - Bewegung wird über die Position und Orientierung des Endeffektors beschrieben – wichtig für Aufgaben wie Greifen oder Schweißen.
- **Pfad:**
 - Positionen und Orientierungen, die der Roboter (Roboterachsen) zwischen verschiedenen Positionen an- bzw. durchfährt





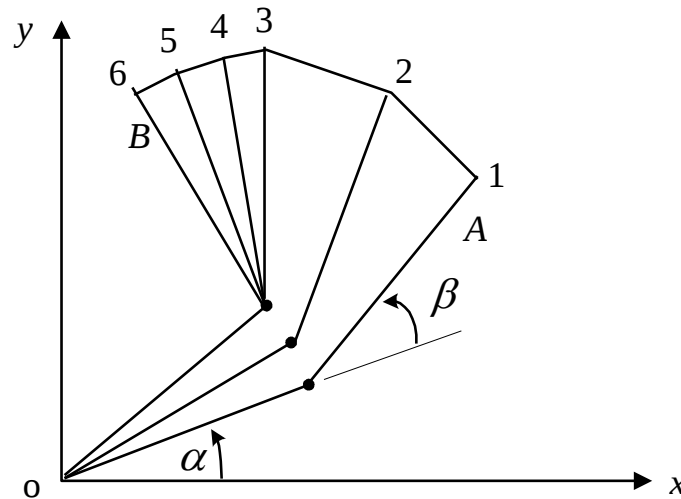
- **Interpolation**

- Für Bewegungen zwischen zwei Zielstellungen werden anhand der programmierten Vorgaben entsprechende Zwischenstellungen berechnet (interpoliert).





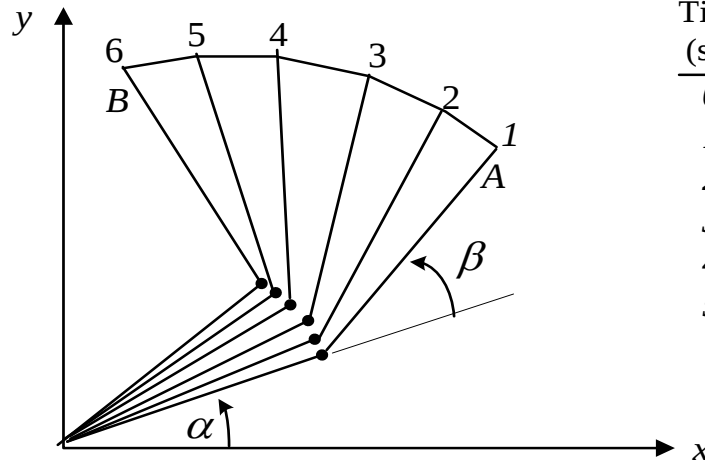
- Annahme: Achsen bewegen sich mit maximalem Wert
- Die Bewegung ist ungleichförmig und nicht vorhersehbar



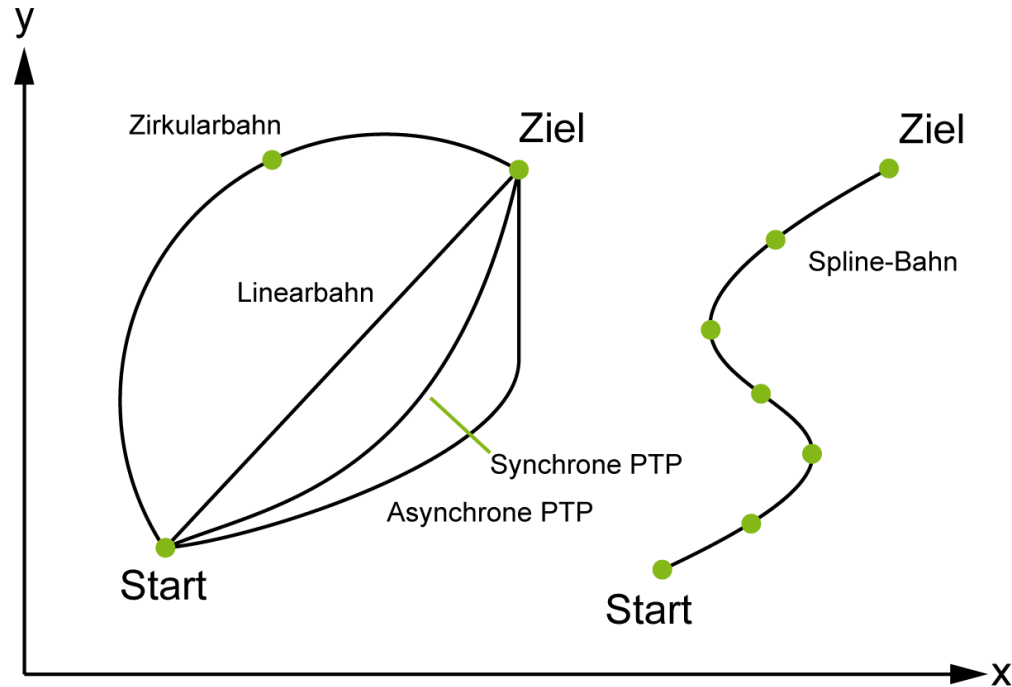
Time (sec)	α	β
0	20	30
1	30	40
2	40	50
3	40	60
4	40	70
5	40	80



- Normalisierung der Achswerte zum gleichzeitigen Starten und Stoppen der Bewegung führen zu gleichförmiger Bewegung.
- Pfad ist unvorhersehbar.



Time (sec)	α	β
0	20	30
1	24	40
2	28	50
3	32	60
4	36	70
5	40	80



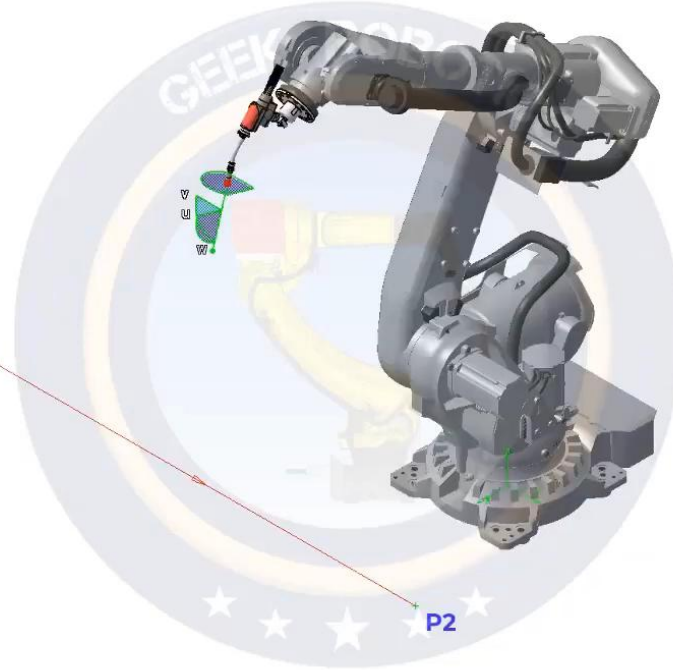
BEWEGUNGSARTEN



P1

LINEAR

MoveL P1
MoveL P2



INTERPOLATIONSARTEN



PTP (Point To Point) Interpolation		CP (Continuous Path) Interpolation		Spline Interpolation
asynchrone PTP	synchrone PTP	linear	zirkular	
Alle Achsen arbeiten autonom Kein gleichzeitiger Stillstand aller	Anpassung der Achsbewegungen an die Achse mit der größten Bewegungszeit	Koordination der Einzelachsen, um die gewünschte Bewegung zu erreichen		Erzeugung einer glatten, stetigen Bahnkurve, die durch mehrere vorgegebene Stützpunkten verläuft.
Beispiel: Pick & Place: Grobe Bewegung bei langen Fahrten	Beispiel: Montage Punktschweißen	Beispiele: Laserschweißen Beschichtungsprozesse		Beispiele: Lackieren von Freiformflächen

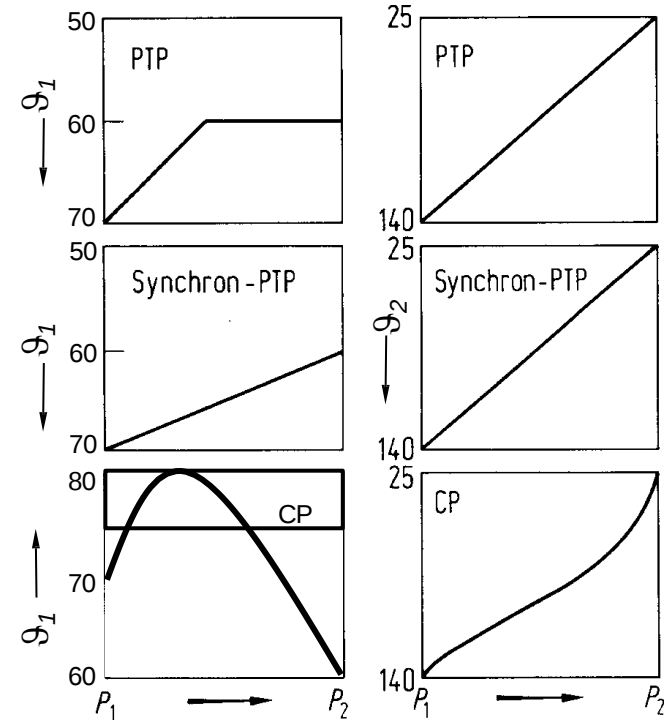
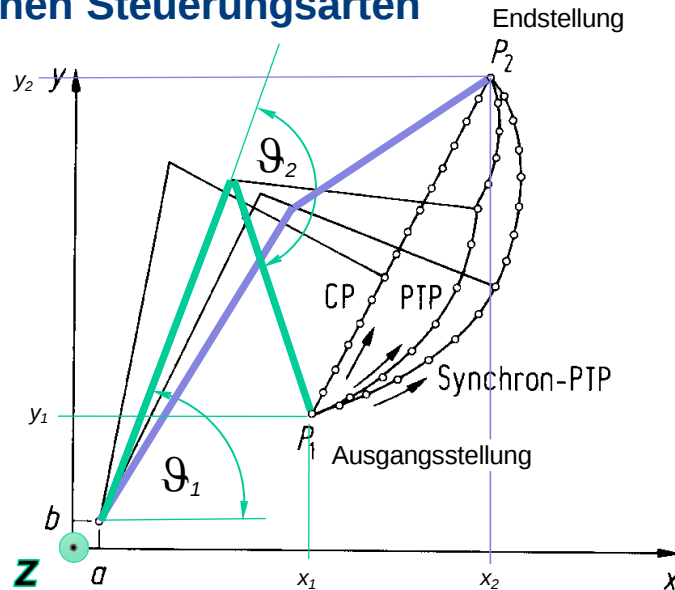
SPLINE INTERPOLATION IM EINSATZ



Quelle: [Ecopaint Robot Generation 3: Line Tracking - Interior Painting - YouTube](#)



Verlauf der Gelenkwinkel ϑ_1 und ϑ_2 bei unterschiedlichen Steuerungsarten



Quelle: nach Warnecke, Schraft: Industrieroboter (korrigiert)

PTP-INTERPOLATION



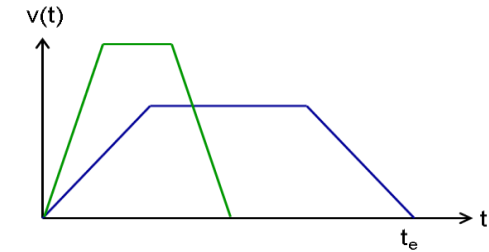
- **Asynchronone PTP-Interpolation**

- Alle Achsen bewegen sich mit maximaler Geschwindigkeit

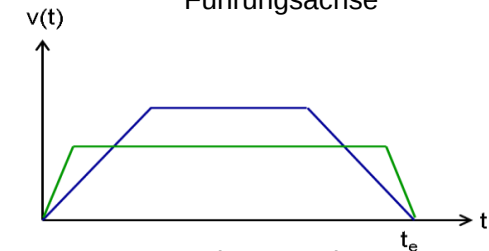
- **Synchrone PTP-Interpolation**

- Anpassung alle Achsen an die Führungsachse
- Führungsachse bewegt sich mit maximale Beschleunigung und Geschwindigkeit
- Vorteile:
 - Kleinere Kräfte (Gelenke, Antriebe)
 - Weniger Energieverbrauch
 - Weichere Bewegungen

- **PTP-Steuerung ist *ungeeignet* für: Bewegungen mit Werkstückbearbeitung + Bewegungen in der Nähe von Hindernissen**
- **PTP-Steuerung ist *geeignet* für: Reine Positionierbewegungen bei genügend freiem Raum um den Arm und um Singularitäten zu umgehen**



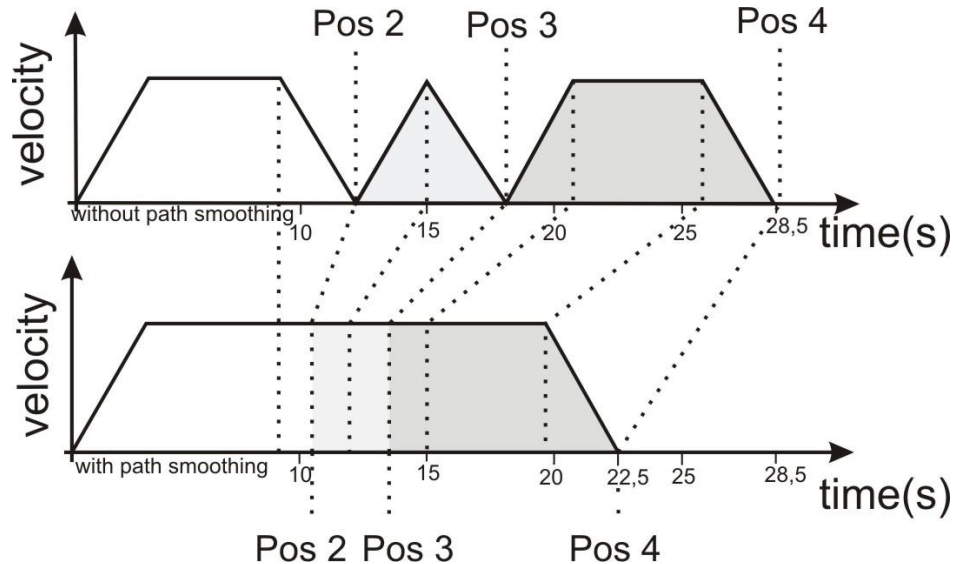
— Führungsachse



— Führungsachse



- Zeiteinsparung beim Überschleifen

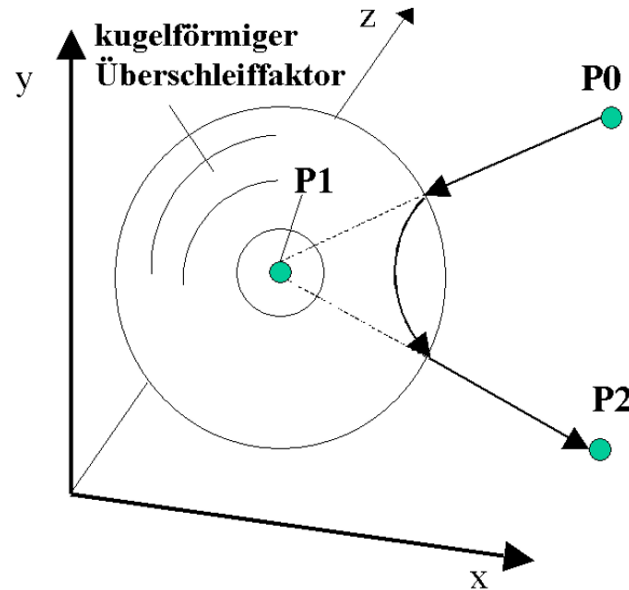


$$\frac{28,5 - 22,5}{28,5} = 21\%$$



Vorteile:

- zeitsparend, da kürzere Bahnen verfahren werden müssen und Start-Stop-Vorgänge vermieden werden
- geringere Belastungen (Gelenke, Antriebe)



P0: Startpunkt

P1: überschliffener Punkt

P2: Endpunkt

ZIRKULARINTERPOLATION (DEFINITION DES KREISBOGENS)

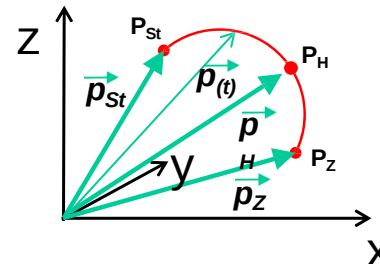


- Bei Industrierobotern wird eine Bewegung entlang eines Kreisbogens durch die Angabe von drei Punkten auf dem Kreisbogen definiert.

Angegeben werden:

- die Lage des Startpunktes (P_{St}),
- die Lage eines Hilfspunktes (P_H) und
- die Lage des Zielpunktes (P_Z)

als Ortvektoren ($\vec{P}_{St}$, $\vec{P}_H$ und $\vec{P}_Z$) bezogen auf das Bezugskoordinatensystem des Roboters.



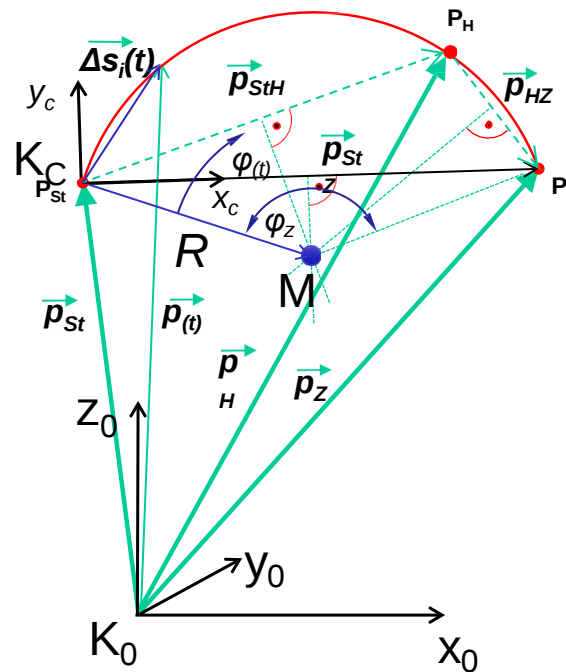
Drei-Punkte auf einem Kreisbogen

ZIRKULARINTERPOLATION (BESTIMMUNG DER PARAMETER)



Für die Interpolation der Kreisbewegung müssen dann berechnet werden:

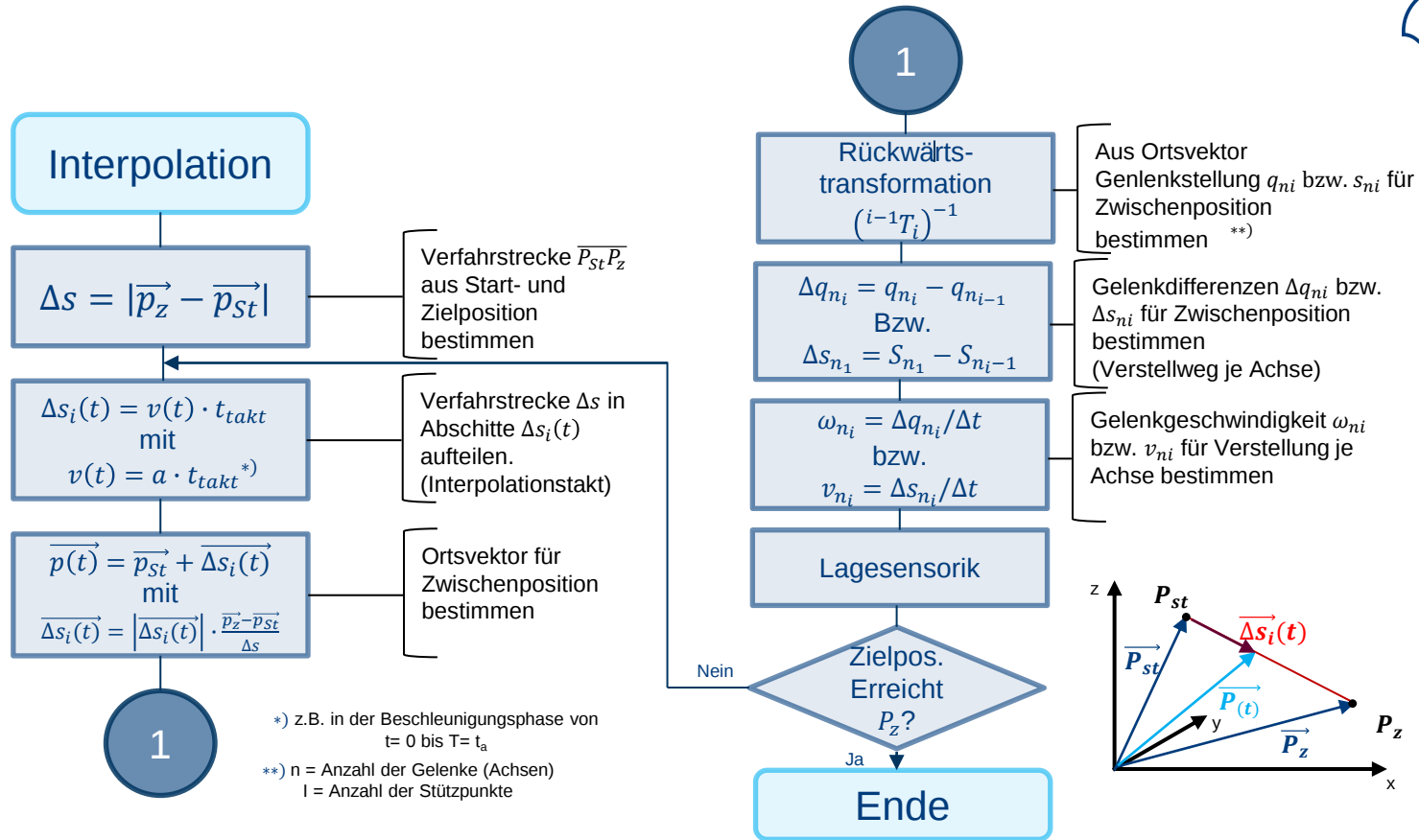
- Lage des Kreismittelpunktes bezogen auf das Bezugskoordinatensystem K_C
- Radius der Kreises
- Berechnung der Zwischenpunkte auf der Kreisbahn bezogen auf K_C
- Bestimmung der Ortsvektoren für die Zwischenpunkte bezogen auf das Bezugskoordinatensystem K_0
- Berechnung der Gelenkstellungen für die Zwischenpunkte (Rückwärtstransformation)



Hilfsgrößen bei der Zirkularinterpolation

Quelle: In Anlehnung an : Weber, W : Industrieroboter: Methoden der Steuerung und Regelung

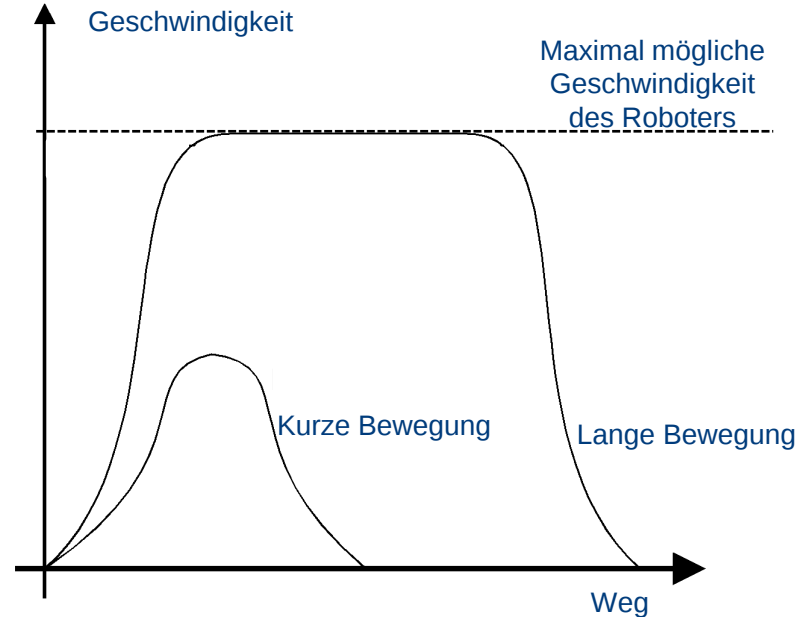
BAHNPLANUNG GRUNDLEGENDES VORGEHEN



BAHNGESCHWINDIGKEITEN



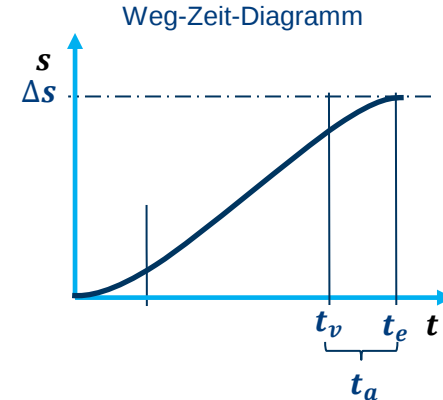
- Fahrverhalten und Bahngeschwindigkeit eines Roboter in Abhängigkeit von der Länge des Fahrwegs
- Übliche maximale Bahngeschwindigkeiten von Industrierobotern 0,5 – 4 m/s (10 m/s)
- Maximalgeschwindigkeit ist abhängig von der Baugröße (Tragfähigkeit).
- Drehgeschwindigkeit der 1. Achse von Vertikal Knickarmrobotern:
 - 3 Kg → 240°/s
 - 15 Kg → 120°/s
 - 45 Kg → 100°/s
 - 300 Kg → 75°/s



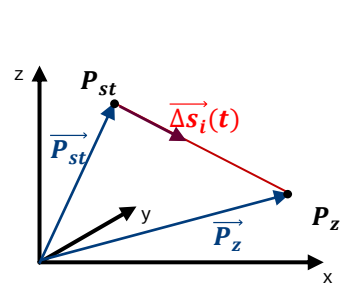
LINEARE PLANUNG MIT PARABOLISCHEN FLANKEN



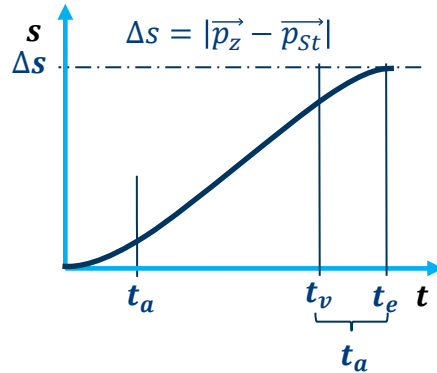
- Bewegung der Gelenke mit konstanter Geschwindigkeit von der Anfangs- zur Zielposition.
- Vergleichbar mit einem Polynom erster Ordnung, bei dem die Geschwindigkeit konstant ist und die Beschleunigung gleich 0 ist.
- Es wird eine unendliche Beschleunigung benötigt, um sofort die geforderte Geschwindigkeit zu erreichen.
- Lösung: Verbindung eines linearen und eines parabolischen Abschnittes am Anfang und Ende der Bewegung um eine gleichförmige Bewegung zu erreichen.



LINEARINTERPOLATION – BEWEGUNGSDIAGRAMME



b) Weg-Zeit-Diagramm



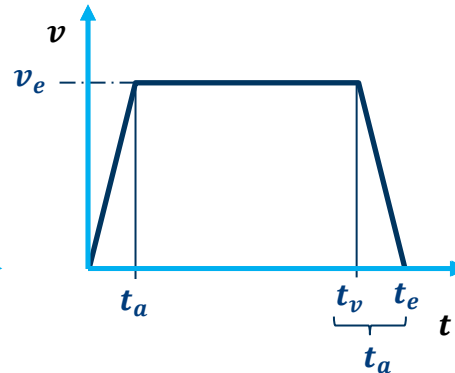
$$t_a = \frac{v_e}{a}$$

$$t_e = \frac{\Delta s}{v_e} + t_a$$

Dauer der
Beschleunigungs-
phase

Gesamtzeit
für die
Bewegung

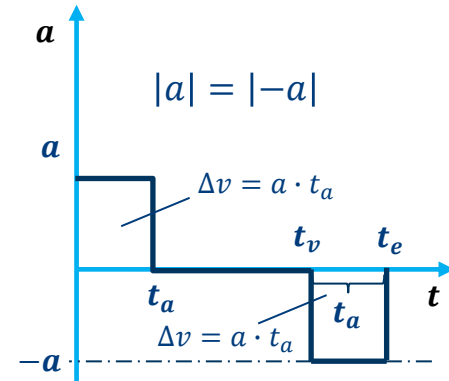
a) Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



$$t_v = t_e - t_a$$

Beginn der
Verzögerung

c) Beschleunigungs-Zeit-Diagramm



$$\Delta s(t) = \Delta s_a(t) + \Delta s_v(t) + \Delta s_e(t)$$

$$\Delta s = v_e \cdot t_a + v_e \cdot (t_e - 2 \cdot t_a)$$

RAMPENPROFIL ZUR INTERPOLATION



- Formeln zur Berechnung der Positionen t_0 und t_e :

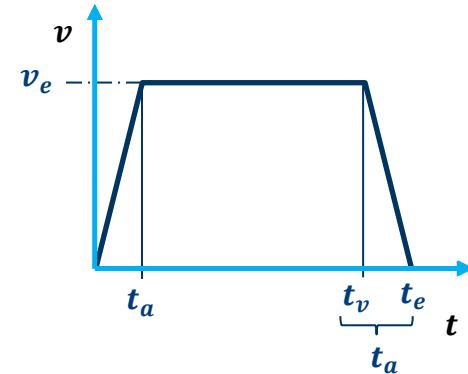
$$\Delta s(t) = \Delta s_a(t) + \Delta s_v(t) + \Delta s_e(t)$$

$$0 \leq t \leq t_a: \quad \Delta s_a(t) = \frac{1}{2} \cdot v_e \cdot t_a$$

$$t_a \leq t \leq t_v: \quad \Delta s_v(t) = v_e \cdot (t_e - 2 \cdot t_a)$$

$$t_v \leq t \leq t_e: \quad \Delta s_e(t) = \frac{1}{2} \cdot v_e \cdot t_a$$

a) Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



$$\Delta s = v_e \cdot t_a + v_e \cdot (t_e - 2 \cdot t_a)$$



- 1. Bei einer Schubachse beträgt der Verfahrweg 768mm. Die Verfahrzeit beträgt 5,7 s (ohne brems- oder Beschleunigungsvorgang). Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit wird die Achse bewegt?**
- 2. Bei einer Schubachse wird die Beschleunigungszeit vom Hersteller mit Konstant 350ms angegeben. Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Achse auf einem Weg von 255 mm und wie groß ist die Beschleunigung?**



1. Bei einer Schubachse beträgt der Verfahrweg 768mm. Die Verfahrzeit beträgt 5,7 s (ohne brems- oder Beschleunigungsvorgang). Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit wird die Achse bewegt?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{768\text{mm}}{5,7\text{s}} = \underline{\underline{134,7 \frac{\text{mm}}{\text{s}}}}$$

2. Bei einer Schubachse wird die Beschleunigungszeit vom Hersteller mit Konstant 350ms angegeben. Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Achse auf einem Weg von 255 mm und wie groß ist die Beschleunigung?

$$\left. \begin{aligned} \Delta s_a(t) &= \frac{1}{2} \cdot v_e \cdot t_a \\ t_a &= \frac{v_e}{a} \end{aligned} \right\} \Delta s = \frac{a \cdot \Delta t^2}{2} \rightarrow a = \frac{2 \cdot \Delta s}{\Delta t^2} = \frac{2 \cdot 255\text{mm} \cdot \text{m}}{0,35^2 \cdot \text{s}^2 \cdot 1000\text{mm}} = \underline{\underline{4,16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

LINEARINTERPOLATION – BEWEGUNGSPARAMETER EINES TRANSLATIONSGELENK



Ein Translationsgelenk bewegt sich von $P_1 = 0,5$ m auf $P_2 = 1,4$ m. Die Bewegung soll mit einer Geschwindigkeit von 300 mm/s durchgeführt werden. Die Phase der gleichbleibenden Beschleunigung bzw. Verzögerung beträgt 300 ms.

Bestimmen Sie:

- a) Die Beschleunigung/Verzögerung der Achse.
- b) Den während der Beschleunigung/Verzögerung zurückgelegten Weg.
- c) Die Dauer der Bewegung.

LINEARINTERPOLATION – BEWEGUNGSPARAMETER EINES TRANSLATIONSGELENK



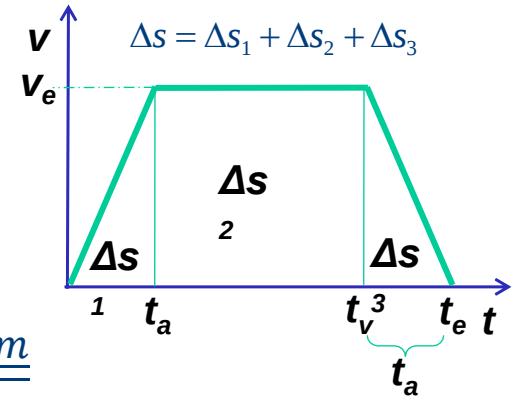
Ein Translationsgelenk bewegt sich von $P_1 = 0,5 \text{ m}$ auf $P_2 = 1,4 \text{ m}$. Die Bewegung soll mit einer Geschwindigkeit von 300 mm/s durchgeführt werden. Die Phase der gleichbleibenden Beschleunigung bzw. Verzögerung beträgt 300 ms .

Bestimmen Sie:

- Die Beschleunigung/Verzögerung der Achse.
- Den während der Beschleunigung/Verzögerung zurückgelegten Weg.
- Die Dauer der Bewegung.

$$\text{a) } a = \frac{v_e}{t_a} = \frac{300 \text{ mm}}{s \cdot 0,3s} = \underline{\underline{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \quad \text{b) } \Delta s_{1,3} = \frac{v_e \cdot t_a}{2} = \frac{300 \text{ mm} \cdot 0,3s}{2 \cdot s} = \underline{\underline{45 \text{ mm}}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } t_e &= \frac{\Delta s}{v_e} + t_a & \Delta s &= \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 \text{ mit } \Delta s = P_2 - P_1 \\ & & \Delta s &= P_2 - P_1 = 1,4 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 0,9 \text{ m} \\ & & t_e &= \frac{0,9 \text{ m} \cdot s}{0,3 \text{ m}} + 0,3 \text{ s} = \underline{\underline{3,3 \text{ s}}} \end{aligned}$$



LINEARINTERPOLATION (ÜBUNG: BERECHNUNG DER BEWEGUNGSPARAMETER FÜR ROTATIONSGELENKE)



Für die Bewegung einer Synchron PTP-Steuerung von Pose 1 nach Pose 2 müssen zwei Drehgelenke bewegt werden. Achse 1 von $P_{1.1} = -45^\circ$ nach $P_{1.2} = 45^\circ$. Achse 2 von $P_{2.1} = 17^\circ$ nach $P_{2.2} = -33^\circ$.

Die Bewegung soll nach 4sec abgeschlossen sein.

Die Phase der gleichbleibenden Beschleunigung bzw. Verzögerung beträgt 300 ms.
Welche Winkelgeschwindigkeit ω erreichen die jeweiligen Achsen?

$$\text{Radiant} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$$

LINEARINTERPOLATION (ÜBUNG: BERECHNUNG DER BEWEGUNGSPARAMETER FÜR ROTATIONSGELENKE)



Für die Bewegung einer Synchron PTP-Steuerung von Pose 1 nach Pose 2 müssen zwei Drehgelenke bewegt werden. Achse 1 von $P_{1,1} = -45^\circ$ nach $P_{1,2} = 45^\circ$. Achse 2 von $P_{2,1} = 17^\circ$ nach $P_{2,2} = -33^\circ$.

Die Bewegung soll nach 4sec abgeschlossen sein.

Die Phase der gleichbleibenden Beschleunigung bzw. Verzögerung beträgt 300 ms. Welche Winkelgeschwindigkeit ω erreichen die jeweiligen Achsen?

$$\text{Radiant} = \frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$$

$$\Delta q_1 = \omega_{e1} \cdot t_a + \omega_{e1} \cdot (t_e - 2 \cdot t_a) = \omega_{e1} \cdot t_e - \omega_{e1} \cdot t_a \Rightarrow$$

$$\omega_{e1} = \frac{\Delta q_1}{t_e - t_a} = \frac{90^\circ \cdot \pi}{180^\circ(4s - 0,3s)} = \underline{\underline{0,4245 \frac{1}{s}}}$$

$$\Delta q_2 = P_{2,2} - P_{2,1} = -33^\circ - 17^\circ = \underline{\underline{-50^\circ}}$$

$$\omega_{e2} = \frac{\Delta q_2}{t_e - t_a} = \frac{-50^\circ \cdot \pi}{180^\circ(4s - 0,3s)} = \underline{\underline{0,2358 \frac{1}{s}}}$$



Berechnung des Ortsvektors für Zwischenpositionen

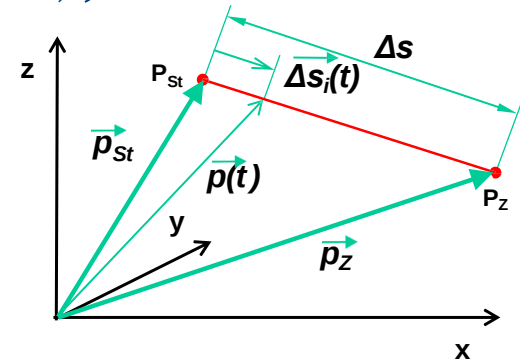
- Strecke zwischen Start- und Zielpose der Linearbewegung

$$\Delta s = |\vec{p}_z - \vec{p}_{st}| = \sqrt{(p_{z,x} - p_{st,x})^2 + (p_{z,y} - p_{st,y})^2 + (p_{z,z} - p_{st,z})^2}$$

- momentaner Ortsvektor $\vec{p}(t)$ des TCPs

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{st} + \Delta s_i(t) \quad \text{mit} \quad \Delta s_i(t) = \left| \Delta s_i(t) \right| \cdot \frac{(\vec{p}_z - \vec{p}_{st})}{\Delta s}$$

Ortsvektor(t)
Startvektor
Wegvektor(t)
Weginkrement pro Interpolationstakt
Richtungsvektor (Einheitsvektor)



vektorielle Geradengleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{st} + \left| \Delta s_i(t) \right| \cdot \frac{(\vec{p}_z - \vec{p}_{st})}{\Delta s}$$

LINEARINTERPOLATION (BEISPIEL: BERECHNUNG DES ORTSVEKTOR $P(T)$)



Der TCP eines Roboters soll sich auf einer Linearbahn von $p_{St} = [-1, 2, 0]^T$ m auf die Position $p_Z = [1, 4, 1]^T$ m bewegen. Die Geschwindigkeit auf der Geraden soll $v_e = 1.5$ m/s und die Beschleunigung und Bremsbeschleunigung $a = 4$ m/s² betragen.

Bestimmen Sie den Ortsvektor $p(1s)$.

Der Weg Δs berechnet sich zu:

LINEARINTERPOLATION (BEISPIEL: BERECHNUNG DES ORTSVEKTOR $P(T)$)



Der TCP eines Roboters soll sich auf einer Linearbahn von $p_{St} = [-1, 2, 0]^T$ m auf die Position $p_Z = [1, 4, 1]^T$ m bewegen. Die Geschwindigkeit auf der Geraden soll $v_e = 1.5$ m/s und die Beschleunigung und Bremsbeschleunigung $a = 4$ m/s² betragen.

Bestimmen Sie den Ortsvektor $p(1s)$.

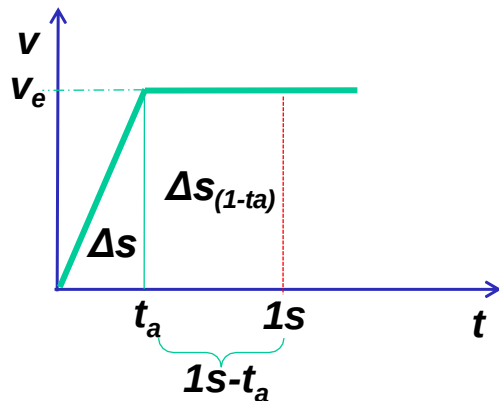
Der Weg Δs berechnet sich zu:

$$p(1s) \text{ bestimmt sich dann zu: } \overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p}_{St} + \overrightarrow{\Delta s}_i(t) \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\Delta s}_i(t) = \left| \overrightarrow{\Delta s}_i(t) \right| \cdot \frac{(\overrightarrow{p}_Z - \overrightarrow{p}_{St})}{\Delta s}$$

$$\left| \overrightarrow{\Delta s}_i(t) \right| = \Delta s_1 + \Delta s_{(1-t_a)}$$

$$\Delta s = |\overrightarrow{p}_Z - \overrightarrow{p}_{St}| = \sqrt{(p_{Z,x} - p_{St,x})^2 + (p_{Z,y} - p_{St,y})^2 + (p_{Z,z} - p_{St,z})^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (4 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} m = 3m$$



Quelle: In Anlehnung an Weber, W : Industrieroboter: Methoden der Steuerung und Regelung

LINEARINTERPOLATION (BEISPIEL: BERECHNUNG DES ORTSVEKTOR $P(T)$, FORTSETZUNG)



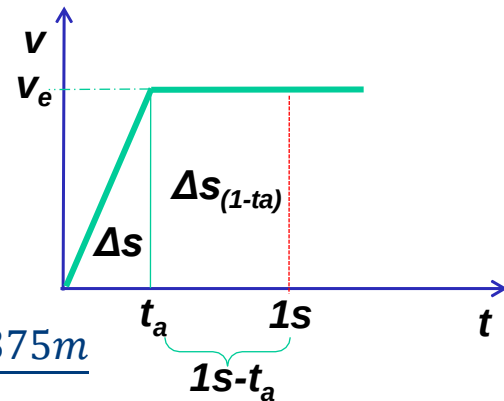
Die Beschleunigungs- und Bremsdauer wird zu:

$$t_a = \frac{v_e}{a} = \frac{1,5m \cdot s^2}{s \cdot 4m} = \underline{0,375s}$$

Beschleunigungsweg: $\Delta s_1 = \frac{v_e \cdot t_a}{2} = \frac{1,5m \cdot 0,375s}{s \cdot 2} = \underline{0,28125m}$

Restweg bis $t=1s$: $\Delta s_{(1s-t_a)} = v_e \cdot (1s - t_a) = \frac{1,5m \cdot (1s - 0,375s)}{s} = \underline{0,9375m}$

$$|\overrightarrow{\Delta s_i(t)}| = 0,28125m + 0,9375m = \underline{1,21875m}$$



Verfahrweg als Vektor:

$$\overrightarrow{\Delta p} = \overrightarrow{p_z} - \overrightarrow{p_{st}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} m - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} m$$

Richtungsvektor oder normierter Vektor von Δp :

$$\overrightarrow{e_p} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta s} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} m}{3m} = \begin{pmatrix} 0,6667 \\ 0,6667 \\ 0,3333 \end{pmatrix}$$

LINEARINTERPOLATION (BEISPIEL: BERECHNUNG DES ORTSVEKTOR $P(T)$, FORTSETZUNG)



$p(1s)$ bestimmt sich dann zu: $\overrightarrow{p(t)} = \overrightarrow{p_{St}} + \overrightarrow{\Delta s_i(t)}$ mit $\overrightarrow{\Delta s_i(t)} = \left| \overrightarrow{\Delta s_i(t)} \right| \cdot \frac{(\overrightarrow{p_z} - \overrightarrow{p_{St}})}{\Delta s}$

$$= \overrightarrow{p_{St}} + \left| \overrightarrow{\Delta s_i(t)} \right| \cdot \frac{(\overrightarrow{p_z} - \overrightarrow{p_{St}})}{\Delta s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m + 1,21875m \cdot \begin{pmatrix} 0,6667 \\ 0,6667 \\ 0,3333 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m + \begin{pmatrix} 0,81250 \\ 0,81250 \\ 0,40625 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} -0,18749 \\ 2,81250 \\ 0,40625 \end{pmatrix} m$$



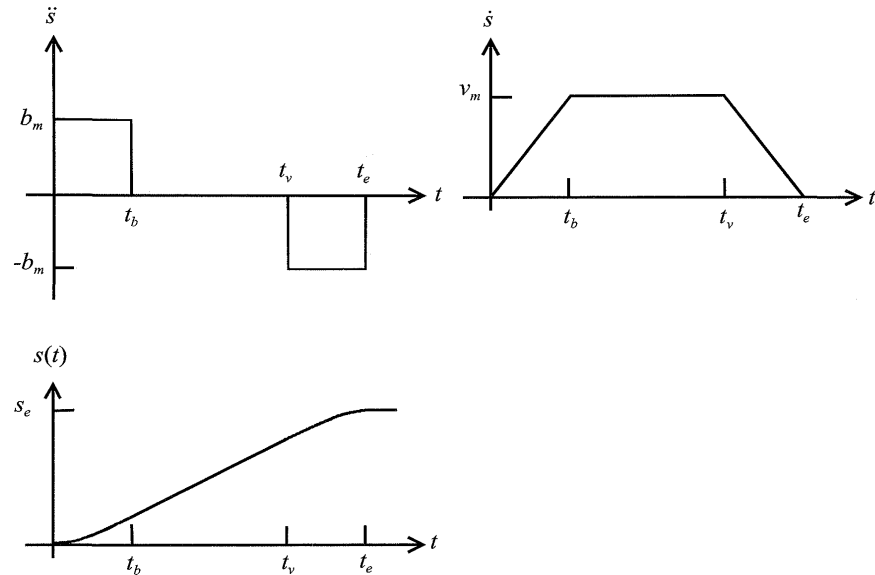
■ Rampe

- Geschwindigkeit wird linear, d.h. mit konstanter Beschleunigung, erhöht bzw. verringert

■ Nachteil:

- Beschleunigung und Kraft verändern sich sprunghaft

- Anregungen von Eigenschwingungen der Robotermechanik und Verminderung der Lebensdauer mechanischer Bauteile



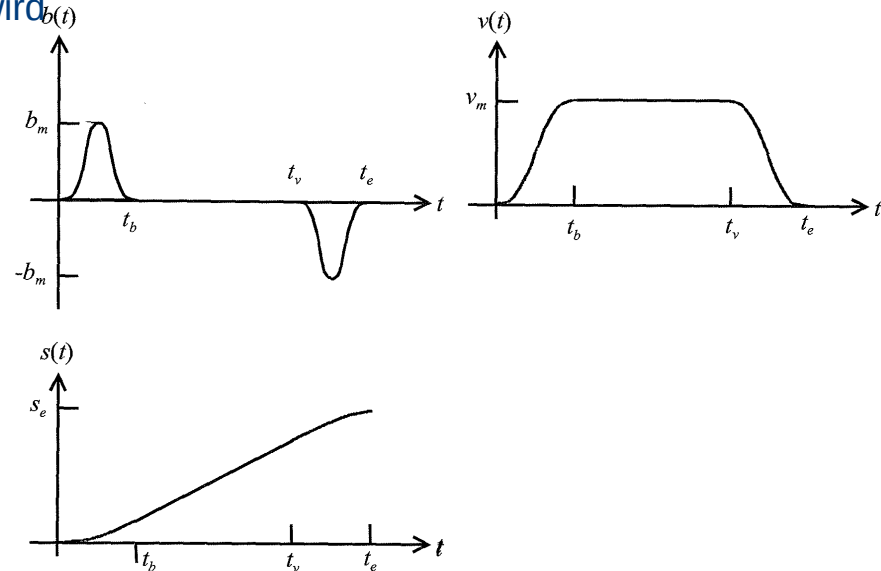


■ Sinuide

- Beschleunigung mit einem Sinus-Profil wird bis zu Maximalwert gesteigert und fällt anschließend wieder ab

■ Vorteil:

- stetige und weiche Kraftveränderung
- ruckfreie Bewegung

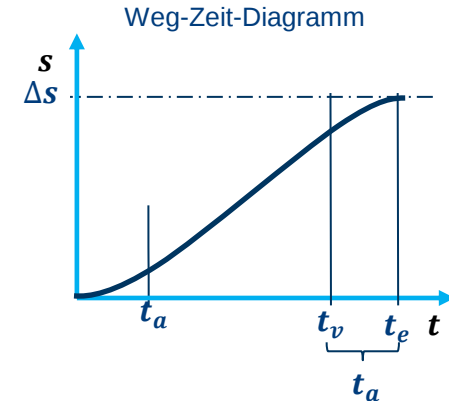


Quelle: Weber

BEWEBUNGSPLAUNG: LINEARE PLANUNG MIT PARABOLISCHEN FLANKEN (RAMPENPROFIL)



- Die Anfangs und die Endposition zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und t_e werden durch q_0 und q_e beschrieben. Der Übergang von der Linear- zur Parabelbewegung erfolgt symmetrisch zu den Zeitpunkten t_a und $t_b = t_e - t_a$
- Bewegungsgleichungen für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung
 - Position: $q(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2$
 - Geschwindigkeit: $\dot{q}(t) = c_1 t + c_2 t$
 - Beschleunigung: $\ddot{q}(t) = c_2$





- Bahnplanung in Gelenkkoordinaten ist praktikabler als die Planung im kartesischen Raum
- Die Bewegungen jeder Achse werden bei der Bahnplanung in Gelenkkoordinaten bestimmt; hierzu werden verschiedene Berechnungsverfahren eingesetzt (Polynome höherer Ordnungen, definierte Beschleunigungsgrenzen, Flankenbewegungen, etc.).
- Die Bewegung jeder Achse wird basierend auf den Achswerten der Rückwärtstransformation berechnet.



- Bahnplanung (Polynom 3. Ordnung)

- 4 Unbekannte müssen berechnet werden;

Polynom 3. Ordnung

$$\theta(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3t$$

- Anfangs- und Endposition und Geschwindigkeiten sind bekannt; 4 Randbedingungen

$$\theta(t_i) = \theta_i \qquad \theta(t_f) = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(t_i) = 0 \qquad \dot{\theta}(t_f) = 0$$



- Bahnplanung (Polynom 3. Ordnung)
- Bestimmung der Konstanten durch die Anfangs- und Endbedingungen:

$$\theta(t_i) = c_0 = \theta_i$$

$$\theta(t_f) = c_0 + c_1 t_f + c_2 t_f^2 + c_3 t_f^3 = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0$$

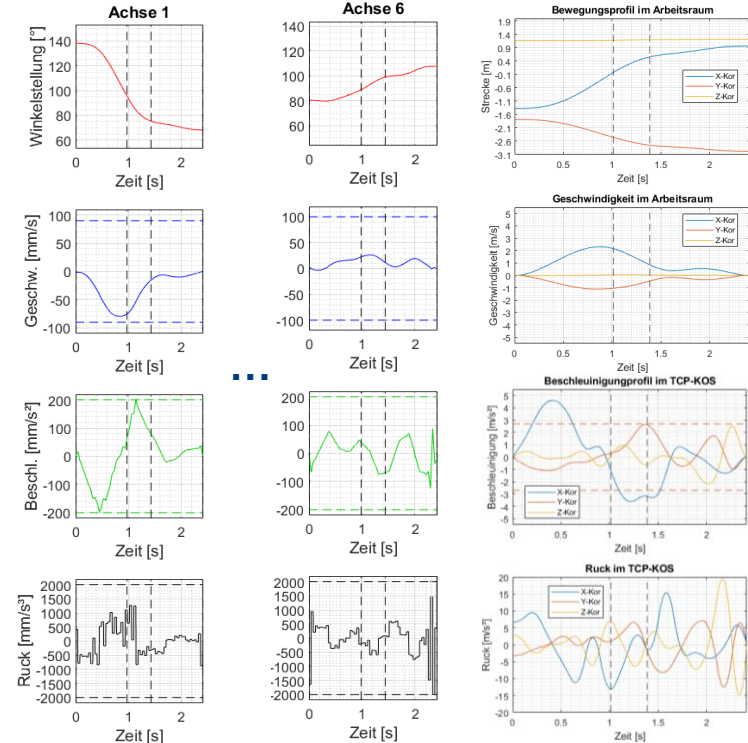
$$\dot{\theta}(t_f) = c_1 + 2c_2 t_f + 3c_3 t_f^2 = 0$$

- Matrixschreibweise:
$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

BAHNPLANUNG POLYNOM 3. ORDNUNG



- Bahnplanung (Polynom 3. Ordnung)
- Durch die Rückwärtstransformation werden die Randbedingungen ermittelt.
- Jedes Gelenk wird durch ein Polynom dritten Grades beschrieben.
- Die resultierende Bewegung entspricht dem gewünschten Bahnverlauf.





- Beispiel 1
- Das erste Gelenk eines 6-Achs-Roboters wird in 5 Sekunden von einem Winkel von 30° zu einem Winkel von 75° bewegt.
- Es soll ein Polynom dritten Grades genutzt werden, um die Winkel nach 1, 2, 3 und 4 Sekunden zu bestimmen.

BAHNPLANUNG POLYNOM 3. ORDNUNG BEISPIEL

LÖSUNG



Die Winkelposition wird allgemein beschrieben durch:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \quad \dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2$$

- Einsetzen der Randbedingungen liefert:

$$\theta(t_i) = c_0 = 30$$

$$\theta(t_f) = c_0 + c_1(5) + c_2(5^2) + c_3(5^3) = 75$$

$$\dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0$$

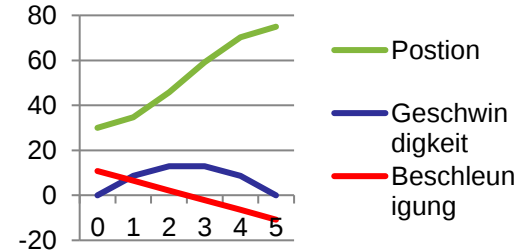
$$\dot{\theta}(t_f) = c_1 + 2c_2(5) + 3c_3(5^2) = 0$$

$$25 \cdot c_2 + 125 \cdot c_3 = 45$$

$$10 \cdot c_2 + 75 \cdot c_3 = 0$$

$$c_2 = -7.5c_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 30 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 5,4 \\ c_3 = -0,72 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = 30 + 5,4t^2 - 0,72t^3 \\ \dot{\theta}(t) = 10,8t - 2,16t^2 \\ \ddot{\theta}(t) = 10,8 - 4,32t \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \theta(1) = 34,68^\circ \\ \theta(2) = 45,84^\circ \\ \theta(3) = 59,16^\circ \\ \theta(4) = 70,32^\circ \end{array} \right.$$





- Beispiel 2
- Der Roboter aus Beispiel 1 verfährt in den nächsten 3 Sekunden, so dass der Winkel 105° beträgt.
- Es soll die Position, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in einem Graphen dargestellt werden.

BAHNPLANUNG POLYNOM 3. ORDNUNG BEISPIEL

LÖSUNG



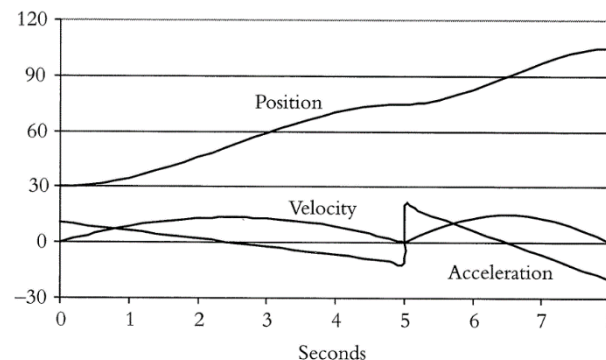
$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t$$

$$\text{Für } t_i = 0 \quad \theta_i = 75 \quad \dot{\theta}_i = 0$$

$$\text{Für } t_f = 3 \quad \theta_f = 105 \quad \dot{\theta}_f = 0$$



Folgt: $c_0 = 75$ $c_1 = 0$ $c_2 = 10$ $c_3 = -2,222$

$$\theta(t) = 75 + 10t^2 - 2,222t^3$$

$$\dot{\theta}(t) = 20t - 6,666t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 20 - 13,332t$$



- Bahnplanung (Polynom 5. Ordnung)
- Anfangs- und Endposition, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sind bekannt; 6 Randbedingungen
- 6 Unbekannte müssen berechnet werden;
Polynom 5. Ordnung
$$\begin{aligned}\theta(t) &= c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + c_5t^5 \\ \dot{\theta}(t) &= c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2 + 4c_4t^3 + 5c_5t^4 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2c_2 + 6c_3t + 12c_4t^2 + 20c_5t^3\end{aligned}$$
- Bestimmung der Konstanten durch die Anfangs- und Endbedingungen.
- Mit Hilfe der Gleichungen lassen sich auf Basis der Rückwärtstransformation die einzelnen Achsbewegungen bestimmen.



■ Beispiel 3:

Betrachtung der Bahn von Beispiel 1, jedoch mit der Annahme, dass die Anfangs- und Endgeschwindigkeit $\pm 5^\circ/\text{sek}^2$ beträgt.

Es soll die Position, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in einem Graphen dargestellt werden.

Ansatz mit einem Polynom 5. Ordnung:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$$

BAHNPLANUNG POLYNOM 5. ORDNUNG BEISPIEL

LÖSUNG



Aus Lösung BSP.1 und der Aufgabenstellung bekannt:

$$\begin{aligned}\theta_i &= 30^\circ & \dot{\theta}_i &= 0^\circ/\text{sek} & \ddot{\theta}_i &= 5^\circ/\text{sek}^2 \\ \theta_f &= 75^\circ & \dot{\theta}_f &= 0^\circ/\text{sek} & \ddot{\theta}_f &= -5^\circ/\text{sek}^2\end{aligned}$$

Wir setzen die sechs Bedingungen bei $t=0$ und $t=5$ ein:

1. $\theta(0) = c_0 = 30$
2. $\dot{\theta}(0) = c_1 = 0$
3. $\ddot{\theta}(0) = 2c_2 = 5 \Rightarrow c_2 = 2,5$
4. $\theta(5) = 30 + 0 + 2,5 \cdot 25 + c_3 \cdot 125 + c_4 \cdot 625 + c_5 \cdot 3125 = 75$
5. $\dot{\theta}(5) = 0 + 2 \cdot 2,5 \cdot 5 + 3c_3 \cdot 25 + 4c_4 \cdot 125 + 5c_5 \cdot 625 = 0$
6. $\ddot{\theta}(5) = 5 + 6c_3 \cdot 5 + 12c_4 \cdot 25 + 20c_5 \cdot 125 = -5$

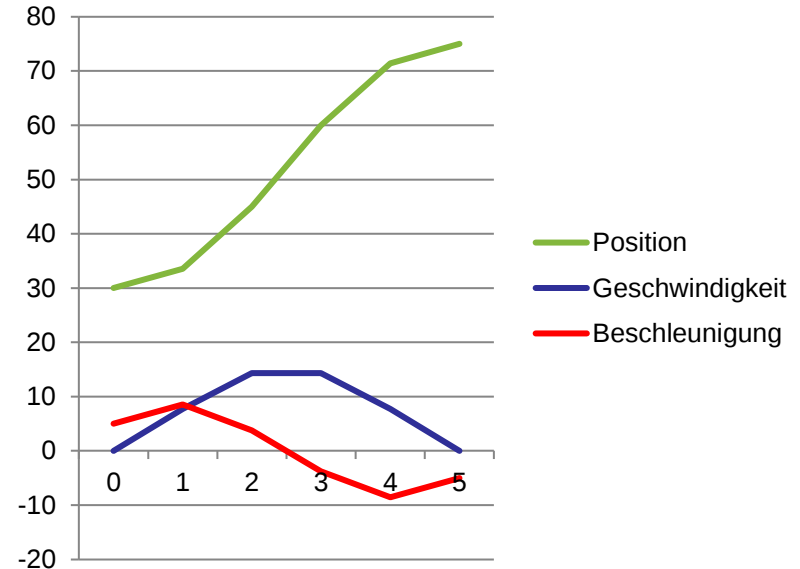
Durch einsetzen in $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ und $\ddot{\theta}(t)$ folgt:

$$\begin{aligned}c_0 &= 30 & c_1 &= 0 & c_2 &= 2,5 \\ c_3 &= 1,6 & c_4 &= -0,58 & c_5 &= 0,0464\end{aligned}$$

$$\theta(t) = 30 + 2,5t^2 + 1,6t^3 - 0,58t^4 + 0,0464t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = 5t + 4,8t^2 - 2,32t^3 + 0,232t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 5 + 9,6t - 6,96t^2 + 0,928t^3$$





- Polynome höherer Ordnung
- Je mehr Abschnitte bekannt sind, umso mehr Informationen sind verfügbar.
- Polynome höherer Ordnung können genutzt werden, jedoch ist die Lösung dieser aufwendiger:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n$$

- Kombination mehrerer Polynome niedriger Ordnung für einzelne Abschnitte der Bahn, um alle erforderlichen Randbedingungen zu erhalten