

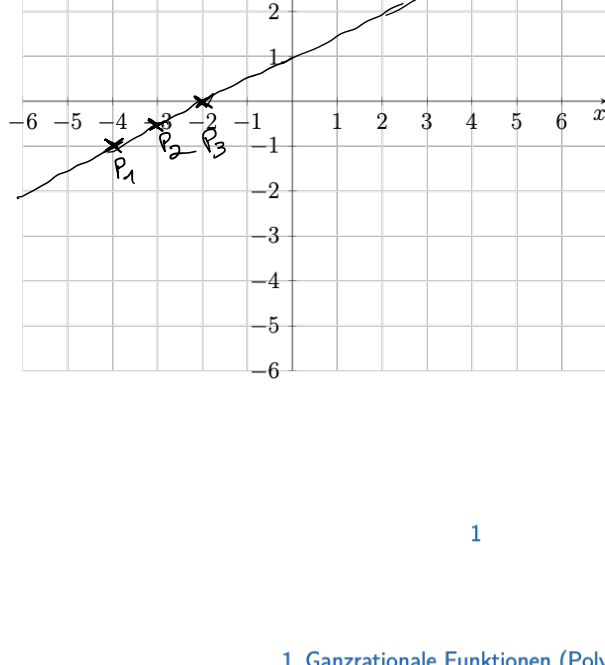
1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1.1 Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade...
Es folgt eine Analyse einer linearen Funktion an einem Beispiel, mit der Ziel, anhand bestimmter charakteristischer Eigenschaften den Graph zu skizzieren:
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

x	f(x)	Punkte
-4	$f(-4) = \frac{1}{2}(-4) - 1 = -2 - 1 = -3$	$P(-4 -3)$
-3	$f(-3) = \frac{1}{2}(-3) - 1 = -1.5 - 1 = -2.5$	$P(-3 -2.5)$
-2	$f(-2) = \frac{1}{2}(-2) - 1 = -1 - 1 = -2$	$P(-2 -2)$
-1	$f(-1) = \frac{1}{2}(-1) - 1 = -0.5 - 1 = -1.5$	$P(-1 -1.5)$
0	$f(0) = \frac{1}{2}(0) - 1 = -1$	$P(0 -1)$
1	$f(1) = \frac{1}{2}(1) - 1 = 0.5 - 1 = -0.5$	$P(1 -0.5)$
2	$f(2) = \frac{1}{2}(2) - 1 = 1 - 1 = 0$	$P(2 0)$

Die Menge aller Punkte lässt sich als Graph in einem Koordinatensystem darstellen:

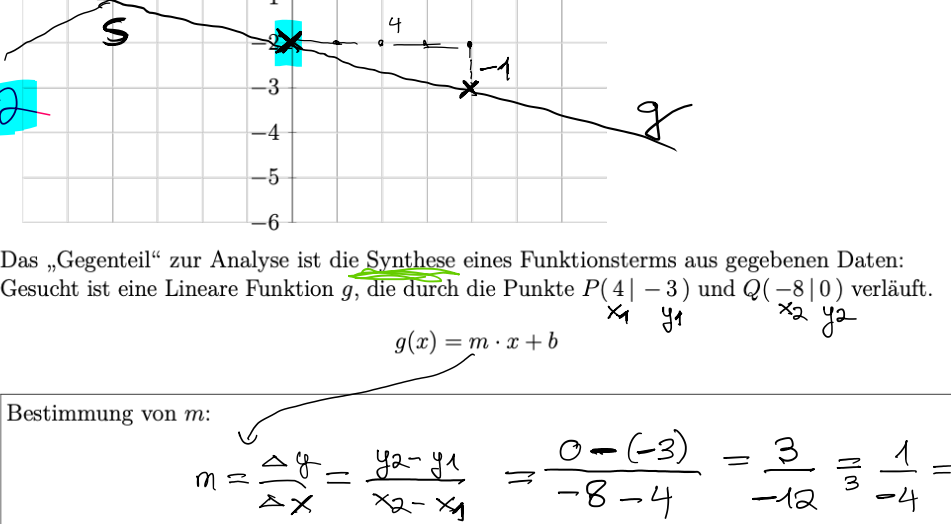


1

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Definition 1.1: Funktion
Eine Funktion ordnet jedem x aus dem Definitionsbereich (die Zahlen, die man für x einsetzen darf) eindeutig einem Funktionswert f(x) (die y-Koordinate) aus dem Wertebereich (Menge aller Funktionswerte) zu.

Der Graph einer linearen Funktion kann man auch direkt mittels der im Funktionsform vorgegebenen Koeffizienten skizzieren:
 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
Steigung m = $\frac{1}{2}$
y-Achsenabschnitt p = -1



Das „Gegenteil“ zur Analyse ist die Skizzierung eines Funktionsterms aus gegebenen Daten:
Gesucht ist eine lineare Funktion f, die durch die Punkte P(1 | 3) und Q(-8 | 5) verläuft.
 $g(x) = m \cdot x + b$

Bestimmung von m:
 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 5}{1 - (-8)} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$
also $g(x) = \frac{2}{7}x + b$

2

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Bestimmung von k:
 $P(x) = 2x^2 + kx - 3$
Skizze: $P(4 | -3)$
 $-1 \cdot 4 + b = -3$
 $-4 + b = -3$
 $b = 1$
Somit ist $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = g(x)$
 $\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{4}x - 2$
 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = -2 + 1$
 $\frac{3}{4}x = -1$
 $x = -\frac{4}{3}$
 $y = -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{4}{3}) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$
Schnittpunkt: $S(-\frac{4}{3} | -\frac{1}{3})$

1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist immer eine Parabel...
Beispiel 1: Analyse von $f(x) = x^2 + 4x - 12$

Die Erstellung einer qualitativen Skizze des Graphen von f ist noch nicht möglich. Daher werden im Folgenden die sog. Nullstellen der Funktion f berechnet. Die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist eine der wichtigsten Schritte für die Analyse und wird an vielen Stellen in der Analysis benötigt!

Definition 2.1: Nullstellen
Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Hier gilt $f(x) = 0$.

Nullstellen:
Ansatz: $f(x) = 0$
 $x^2 + 4x - 12 = 0$
 $x^2 + 4x = 12$
 $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$
 $(x + 2)^2 = 16$
 $x + 2 = \pm 4$
 $x = -2 \pm 4$
 $x_1 = -6, x_2 = 2$

Skizze:
Die Parabel $f(x) = x^2 + 4x - 12$ hat die Nullstellen $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$.
Schnittpunkt: $S(-6 | 0)$ und $S(2 | 0)$

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Definition 2.2: PQ-Formel
Hat die quadratische Gleichung die Form $ax^2 + px + q = 0$, dann ergeben sich die Nullstellen mittels PQ-Formel zu:
 $x_{1,2} = \frac{-p}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2a}\right)^2 - q}$

Skizze:
Die Parabel $f(x) = x^2 + 4x - 12$ hat die Nullstellen $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$.
Schnittpunkt: $S(-6 | 0)$ und $S(2 | 0)$

Beispiel 2: Analyse von $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
Nullstellen:
 $2x^2 - 4x - 6 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $x^2 - 2x = 3$
 $x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$
 $(x - 1)^2 = 4$
 $x - 1 = \pm 2$
 $x = 1 \pm 2$
 $x_1 = -1, x_2 = 3$

Skizze:
Die Parabel $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ hat die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.
Schnittpunkt: $S(-1 | 0)$ und $S(3 | 0)$

1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades

Der Grad eines Polynoms ist durch die höchste im Funktionsterm vorkommende Potenz festgelegt. Lösen von Aufgabe 1 des ersten Übungsblatts:

$f(x) = x^3 - 1$
Nullstellen:
 $x^3 - 1 = 0$
 $x^3 = 1$
 $x = 1$
Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

Skizze:
Die Funktion $f(x) = x^3 - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$.
Schnittpunkt: $S(1 | 0)$

10