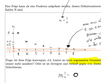
3 Folgen und Grenzwerte

3.1 Folgen

Eine Folge kann als eine Funktion aufgefasst werden, dessen Definitionsbereich die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind.

$f(n) = \frac{1}{n}$ wobei $D = \mathbb{N}$

Wertebereich $= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$



$f(n) = 0$
$f(n) = \frac{1}{2}$
$f(n) = \frac{1}{3}$
$f(n) = \frac{1}{4}$
$f(n) = \frac{1}{5}$
$f(n) = \frac{1}{6}$
$f(n) = \frac{1}{7}$
$f(n) = \frac{1}{8}$
$f(n) = \frac{1}{9}$
$f(n) = \frac{1}{10}$
$f(n) = \frac{1}{11}$
$f(n) = \frac{1}{12}$
$f(n) = \frac{1}{13}$
$f(n) = \frac{1}{14}$
$f(n) = \frac{1}{15}$
$f(n) = \frac{1}{16}$
$f(n) = \frac{1}{17}$
$f(n) = \frac{1}{18}$
$f(n) = \frac{1}{19}$
$f(n) = \frac{1}{20}$

Folge: Ist eine Folge konvergent, so heißt sie auch konvergente Folge, ansonsten ist sie nicht konvergent und heißt eine divergente und divergente Folge.

Grenzwert

$\lim_{n\to\infty} f = 0$

Definition 1.1: Grenzwert einer Zahlenfolge

g ist Grenzwert einer Folge g_n, wenn es in jeder noch so kleinen Umgebung von g nur endlich viele Glieder der Folge gibt. Es gilt: $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Es gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0$ usw.

Merke:

Eine Folge ist ungefähr Beispiel ohne Nullfolge der Grenzfall. Jeder ist konvergent Nullfolge. Nenner hoch gegen ∞.

Die Theorie der Grenzwerte ermöglicht Folgen ist eine wichtige Grundlage in der Analysis und hilft Verwendung bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen, bei Ableitungen.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Am Abbildung 1.a0 Grenzwert einer Folge von Differenzquotienten(und beim Nenner(Ableitungsfunktion)

In der Praxis ersetzt man zur Bestimmung eines Grenzwertes oft eine Definition an, sondern man benutzt die sogenannten Grenzwertsätze, um erhält den Vorteilen in einzelnen.

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und c eine reelle Zahl, dann gilt:

$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Funktionsnamen der Folge kennen (minus) vor Anwendung der Grenzwertsatze angeben (Ich habe vergessen) Anfang.

Beispiel:

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0 + 0 = 0$

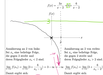
Grenzwert der Summe gleich der Summe der Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 0$

3.2 Grenzwerte von Funktionen

Die Prüfung der Umgebung bei der Grenzwertberechnung von Zahlenfolgen fand sich gesonderte und ist Funktionen (x) ist an von einer reelle Zahl und kann bei Berechnung bei der Funktionen (x).

Die Zusammenhang mit Folgen ist auch Anfang ziemlich, dass man sich bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen, die Folgen zu nutze macht. Es gilt: Wenn $f(x)$ eine reelle Funktion und x_0 eine Stelle, an der $f(x)$ ist, und (x_n) die Folge, die Folge $f(x_n)$ die man sich als Zahlenfolge auf der y-Achse vorstellen dann:



Definition 2.1: Grenzwert einer Funktion

Die Grenzwert einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 existiert und ist gleich g (vorhanden) wenn für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} f(x) = x_0$ die Folge $f(x) = g$. Dann man für jede Folge x_n die Differenzquotient der Funktion, die gegen x_0 geht, gibt, dass die Folge $f(x_n)$ gegen g konvergiert.

Folgendermaßen sind die Folge x_n so wie die Folge $f(x_n)$ gegen g konvergiert.

Da sich die Definition zum Grenzwerte einer Funktion auf die Definition zum Grenzwertes von Zahlenfolgen zurückführen lassen, kann man auch die meisten rechenbaren Grenzwertsätze auf Funktionen übertragen. Dabei ersetzt man die Funktionswerte von Annäherungen die Grenzwertsätze für Folgen. Wenn $f(x)$ und $g(x)$ zwei reelle Funktionen und c eine reelle Zahl und x_0 eine Stelle, an der $f(x)$ und $g(x)$ ist, dann gilt:

$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

Beispiel:

$f(x) = x^2 - x + 1 = \lim_{x\to 2} \left(x^2 + x + 1\right) = 3$

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \infty$

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \infty$

Durch geeigneten Umformungen (oder durch die Anwendung der Regel von de L'Hospital) ist $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ kann man dann vermeiden, in Bezug Nenner einen ungleichen Grenzwert zu berechnen.

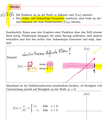
Beispiel:

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Beispiel: Untersuchung der Stetigkeit der Funktionswerte an der Diskontinuitätsstelle $x_0 = 2$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$



Annäherung an 2 von links: Da jeder Anfangs Folge x_n kleiner ist als 2 ist dann Folgenwerte $x_n < 2$ und

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 - 1 = 3$

Grenzwert ergibt sich:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 1 = 3$

Annäherung an 2 von rechts: Da jeder Anfangs Folge x_n kleiner ist als 2 ist dann Folgenwerte $x_n > 2$ und

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2x_n = 4$

Grenzwert ergibt sich:

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = 4$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(x) = 3 = 4$

Merke:

Gibt bei einem Funktionswerten zwei Grenzwerte, Merke: der Nenner gegen 0 ist die Grenzwert unendlich groß 1.0.0.0.

3.3 Stetigkeit

Bezüglich von Funktionen kommt, dass bei einem Anfang Anfang von x und von einer kleinen Umfrung von $f(x)$ passiert, dass wird durch Stetigkeit mathematische Definition ausgedrückt.

Definition 3.1: Stetigkeit – 1.0 Umgebung

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ so dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Dann ist f stetig, wenn f an jeder Stelle x_0 stetig ist.

Eine Fn der Nachweis der Stetigkeit ist praktischer Definition Indem die Folgeformen (x_n)

Definition 3.2: Stetigkeit – Folgekriterium

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn **für alle Folgen** (x_n) aus D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folgen $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Dann ist f stetig, wenn f an jeder Stelle x_0 stetig ist. Die Funktion heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Stetig, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Aus der ersten Definition wird deutlich, dass die Grenzwerte von Funktionen, um an jeder Stelle x_0 stetig ist.

Merke:

$f(x) = \frac{1}{x}$

Die Funktion ist an der Stelle x_0 stetig wenn $f(x_0)$ existiert.

Die Grenze und Stetigkeit Unterschied existieren, sind beide an der Stelle x_0 gleich. Grenzwert hat eine Funktionswert x_0 Stetigkeit.

Stetigkeit of Stetigkeit an Stelle $x_0 = 1$:

① $f(1) = 1$ ✓

② $\lim_{x\to 1} \left(\lim_{x\to 1} x \cdot x\right) = 1$ ✓

③ $\lim_{x\to 1} \left(\lim_{x\to 1} (x+2)\right) = 2$ ✗

$1 \neq 2$

Beispiel:

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$

Nachweis: Es ist Zwischenwerte unterschied aufzeigen, an Beispiel verlangt eine zwei Unterscheidung jeweils auf Beispiel an der Stelle $x_0 = 0$.

$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

Der Zwischenwertsatz leitet die Eigenschaft der „durchgezogenen Graphen" ab:

Definition 3.3: Zwischenwertsatz

Die Zwischenwertsatz sagt aus, dass eine reelle Funktion f in auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

Wenn f eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist und $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben, dann Nullstelle an Nullstelleneinsatz von Zwischen Intervall $[a, b]$.

Falls f auf g stetige Funktionen sind, dann sind auch stetig.

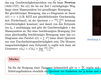
$f + g \quad f - g \quad f \cdot g \quad \frac{f}{g}$

Dabei sind auch die Polynome auch sehr intuitiven Funktion stetig. Auf die Grenzwertsatzes kann man auch Stetigkeitsbeweise für Funktionen ableiten. Wenn eine Funktion aus stetigen Funktionen zusammengesetzt wird, dann ist auch Gesamtfunktion stetig.

Definition 3.4: Satz von Maximum/Minimum

Es existieren zwei Werte $x_m \in [a, b]$ so dass $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$. Das Maximum/Minimum eines stetigen Funktion wird oder in stetigkeits-Intervallen Funktion.

Es gibt Intervall an Satz von Weierstraß(1), einem deutschen Mathematiker, 1815-1897.



Minimum Maximum Wertebereich
Stetigkeit Intervall
Funktion, die im Intervall stetig
Minimum und Maximum

4 Differentialrechnung Teil 1

4.1 Differenzquotient

Auf an die Bestimmung der Ableitung Steigung einer Graphen in einem beliebigen Punkt Sekante Tangente Gleiche Funktion

Steigung ist überall gleich? Ist Differenzwert in der Steigung in einem Punkt Tangente?

Man. Um die Steigung in einem Punkt zu erhalten, hat man Grenze Steigung einer Sekante zu bilden. Der sogenannte Tangentenschnittpunkt gibt auf. Der Differenzwert Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) entwickelt.

Abbildung 1.1: Gottfried von Leibniz

Merke:

Die Tangente an einer Gerade, die durch den Punkt verläuft und nicht in der Umgebung des Punktes hindurchgeht, nähert sich der Steigung im Punkt.

Die Steigung einer Sekante nähert sich der Steigung im Punkt.

Wie gelangt man an diese Steigung?

Beispiel: Steigung der Funktionswert(x) Beispiel: Steigung der Sekante

$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Die Steigung der Sekante durch die zwei Punkte $P_1(x_1, f(x_1))$ und $P_2(x_2, f(x_2))$ ist:

$m_{sek} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Um die Steigung der Tangente zu erhalten, lässt man den Punkt P_2 immer näher an den Punkt P_1 heranrücken. Dann nähert sich die Sekante der Tangente an.

Wenn P_2 sehr nahe an P_1 ist, dann ist $x_2 \approx x_1$ und $\Delta x \approx 0$. Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nimmt einen Wert an, der der Steigung der Tangente im Punkt P_1 entspricht.

Wenn $\Delta x \to 0$ gilt, dann ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzquotient