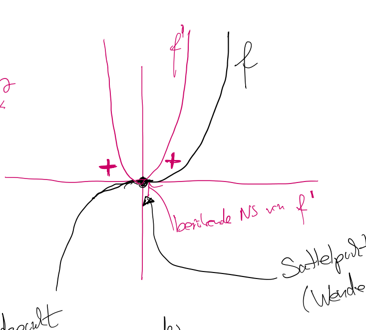
25.02.2026

Sonntag, 22. Februar 2026 12:43

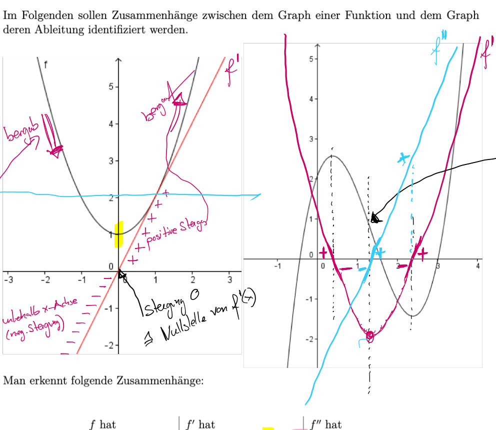


5 Differentialrechnung Teil 2

5.1 Graphisches Ableiten

Im Folgenden sollen Zusammenhänge zwischen dem Graph einer Funktion und dem Graph deren Ableitung identifiziert werden.

$f(x)=x^2+1$
$f'(x)=2x$
$f''(x)=2$



Wendepunkt
- ändert sich die Krümmung des Graphen von rechts/links bzw. links/rechts (vgl. Straßenverlauf)
- hier ist die Steigung extremal, also am größten / kleinsten, also am steilsten bergauf / bergab

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

f hat	f' hat	f'' hat
ein lokales Minimum	eine schneidende NS von –/+	ist positiv ($f''>0$) ≙ 2. Ableitung
ein lokales Maximum	" " NS von +/–	ist negativ (d.h. die Steigung von f' ist negativ ... !)
einen Wendepunkt	ein lokales Minimum / ein lokales Maximum	schneidende NS von –/+ / " " " +/–
Sattelpunkt	eine berührende NS hat	" "

5.2 Berechnung von Extrema (Hoch- bzw. Tiefpunkte) (Maxima, Minima)

Die zuvor festgestellten Zusammenhänge werden nun für die Berechnung von Extrema verwendet, am Beispiel von:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x$$

① **Notwendige Bedingung:** Steigung gleich 0

$f'(x)=0$ (Nullstellen von f')

$3x^2-12x+9=0 \quad |:3$

$x^2-4x+3=0 \quad |$ PQ !

$\boxed{x_1=1}$ oder $\boxed{x_2=3}$ (x-Ko möglicher Hoch- bzw. Tiefpunkte)

② **Hinreichende Bedingung:**

1. Möglichkeit mittels Vorzeichenwechselkriterium von f'

Steigung dauer: $f'(0)=3\cdot0^2-12\cdot0+9=9$ positive Steigung

überprüfe x=1 — MAX

Steigung dddd/dauer: $f'(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+9=12-24+9=-3$ negative Steigung

Steigung dddd: $f'(4)=3\cdot4^2-12\cdot4+9=48-48+9=9$ positive Steigung — MIN

2. Möglichkeit unter Verwendung der 2. Ableitung:

$$f'(x)=0 \text{ und } f''(x)\neq 0$$

überprüfe x=1: $f''(1)=6\cdot1-12=-6<0 \Rightarrow$ MAX

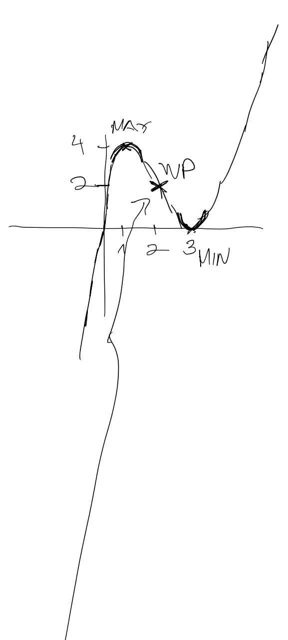
überprüfe x=3: $f''(3)=6\cdot3-12=6>0 \Rightarrow$ MIN

③ **Berechnung der y-Koordinate:** (x-Werte aus ① in Ausgangsfunktion)

$f(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1=1-6+9=4$

$f(3)=3^3-6\cdot3^2+9\cdot3=27-54+27=0$

Damit MAX(1|4) MIN(3|0)



5.3 Berechnung der Wendepunkte

① **Notwendige Bedingung:**

$$f''(x)=0$$

$6x-12=0$

$6x=12$

$x=2$

② **Hinreichende Bedingung:**

$$f''(x)=0 \text{ und } f'''(x)\neq 0$$

$f'''(2)=6\neq0 \Rightarrow$ WP

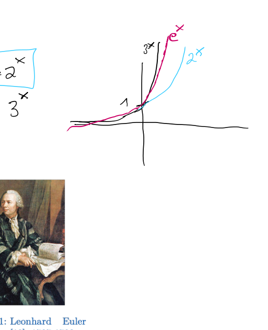
③ **Berechnung der y-Koordinate:**

$f(2)=2^3-6\cdot2^2+9\cdot2=8-24+18=2$

WP(2|2)

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

$f(x)=2^x$
$f(x)=3^x$



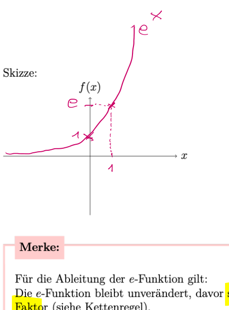
6.1 Die e-Funktion

$f(x)=e^x$ (Exponent, Basis)

Die e-Funktion ist eine Exponentialfunktion mit Basis $e\approx$ 2,718... , der sog. Euler'schen Zahl, benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler...

Abbildung 6.1: Leonhard Euler [12], 1707-1783

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der e-Funktion sind:

D= $\mathbb{R}$

W= $\mathbb{R}_{>0}$ (nur positive Zahlen, d.h. e-Fkt wird niemals 0, hat keine NS !)

$f'(x)=e^x$

Merke:

Für die Ableitung der e-Funktion gilt:
Die e-Funktion bleibt unverändert, davor schreibt man die Ableitung des Exponenten als Faktor (siehe Kettenregel).

z.B.: $f(x)=e^{3x}$

$f'(x)=3\cdot e^{3x}$

Beispiele:

$f(x)=e^{2x}$, $f'(x)=2e^{2x}$ | $f(x)=e^{3x+1}$, $f'(x)=3e^{3x+1}$ | $f(x)=e^{x^2}$, $f'(x)=2x\,e^{x^2}$

$f(x)=e^{-x}$, $f'(x)=-e^{-x}$ | $f(x)=e^{2x}+x^2+4x$, $f'(x)=2e^{2x}+2x+4$ | $f(x)=x^2+e^x$, $f'(x)=2x+e^x$

$f(x)=x^2\cdot e^x$

$f'(x)=\underset{u'}{2x}\cdot\underset{v}{e^x}+\underset{u}{x^2}\cdot\underset{v'}{e^x}$

$f'(x)=e^x(2x+x^2)\overset{!}{=}0$

Extrema: $e^x=0$ (z.1.) oder $2x+x^2=0$ weiterrechnen

Ein Produkt von zwei Funktionstermen kann nicht einfach einzelnd, wie bei einer Summe, abgeleitet werden:

$$f(x)=x^2+e^{4x} \qquad f(x)=x^2\cdot e^{4x}$$

Definition 1.1: Produktregel

Die Funktionen u und v seien im gemeinsamen Definitionsbereich überall differenzierbar. Dann gilt:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

Es ist $f(x)=u(x)\cdot v(x)$, dann ist:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}$$

Durch Addition und Subtraktion von $\frac{u(x)\cdot v(x+h)}{h}$ ergibt sich:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-\mathbf{u(x)\cdot v(x+h)}-u(x)\cdot v(x)+\mathbf{u(x)\cdot v(x+h)}}{h}$$

Ausklammern von $v(x+h)$ sowie $u(x)$ liefert dann:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(u(x+h)-u(x))\cdot v(x+h)+u(x)\cdot(-v(x)+v(x+h))}{h}$$

Unter Verwendung der Grenzwertsätze ergibt sich:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(u(x+h)-u(x))\cdot v(x+h)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{u(x)\cdot(v(x+h)-v(x))}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(u(x+h)-u(x))}{h}\cdot\lim_{h\to0}v(x+h)+u(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{(v(x+h)-v(x))}{h}$$

$$f'(x)=\quad u'(x)\cdot\quad v(x)\quad+u(x)\cdot\quad v'(x)$$

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Beispiele:

$f(x)=e^{2x}\cdot4x$

$f'(x)=2e^{2x}\cdot4x+e^{2x}\cdot4$

$=e^{2x}(8x+4)$

$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$

$f'(x)=2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x})$

$=e^{-x}(2x-x^2)$

$f(x)=(x^2-2x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$f'(x)=(2x-2)\cdot e^{\frac12x}+(x^2-2x)\cdot\frac12e^{\frac12x}$

$=e^{\frac12x}\left((2x-2)+(x^2-2x)\cdot\frac12\right)$

$=e^{\frac12x}\cdot(2x-2+\frac12x^2-x)$

$=e^{\frac12x}\cdot(\frac12x^2+x-2)$

$f(x)=e^{2x+1}\cdot(x-3)$

$f'(x)=2e^{2x+1}\cdot(x-3)+e^{2x+1}\cdot(1)$

$=e^{2x+1}(2\cdot(x-3)+1)$

$=e^{2x+1}\cdot(2x-6+1)$

$=e^{2x+1}\cdot(2x-5)$

Damit man mit der ersten Ableitung weiter rechnen kann (um beispielsweise Extrema zu bestimmen), klammert man den e-Term aus.

Übung: Klammern Sie in den Ableitungen aus obiger Übung jeweils den e-Term aus.

Exkurs: Gewinnung der Euler'schen Zahl aus der Tangente an der Stelle $x=0$

Sei $f(x)=e^x$:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}$$

$$f'(x)=e^x\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^{h+0}-e^0}{h}=e^x\cdot f'(0)$$

Damit die Ableitung der e-Funktion wieder die e-Funktion ergibt, müsste $f'(0)=1$ gelten. Die Steigung der e-Funktion an der Stelle $x=0$ lässt sich durch eine Gerade mit Steigung 1 annähern, d.h.:

$$e^x\approx(1+x)$$

Damit lässt sich die gesuchte Zahl e bestimmen:

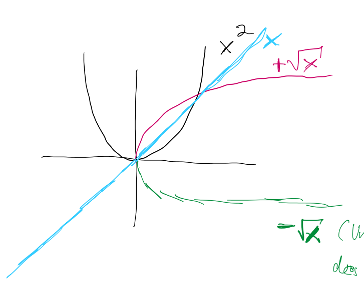
$$e=e^1=e^{\frac{n}{n}}=(e^{\frac1n})^n\approx(1+\frac1n)^n$$

Lässt man nun $n\to\infty$ laufen, ergibt sich als gesuchte Basis und als mögliche Definition der Euler'schen Zahl e:

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac1n\right)^n$$

6.2 Die ln-Funktion

Die Funktion $f(x)=\ln(x)$ ist eine sog. Logarithmusfunktion zur Basis e (natürlicher Logarithmus) und die Umkehrfunktion der e-Funktion.



Merke:

Die Umkehrfunktion entsteht graphisch, wenn man den monoton steigenden (bzw. fallenden) Bereich (nur hier ist eine Funktion umkehrbar, vgl. $f(x)=x^2$) an der Geraden $g(x)=x$ spiegelt. Rechnerisch erhält man diese durch Vertauschen von x und y und möglicher Umformung nach y.

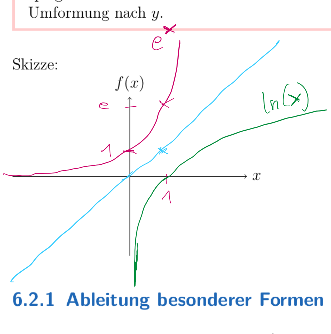
$f(x)=2^x \qquad f^{-1}(x)=\log_2(x)$ (Basis)

$f(x)=3^x \qquad f^{-1}(x)=\log_3(x)$

$f(x)=10^x \qquad f^{-1}(x)=\log_{10}(x)=\lg(x)$

$f(x)=e^x \qquad f^{-1}(x)=\log_e(x)=\ln(x)$

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der *ln*-Funktion sind:

D= $\mathbb{R}_{>0}$ (nur positive einsetzen !)

W= $\mathbb{R}$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

6.2.1 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen

Trick:

Falls die Variable im Exponenten und/oder in der Basis vorkommt, kann man die Funktion wie folgt als e-Funktion schreiben und dann ableiten:

$f(x)=(x)^{3x}$

3. Log-Gesetz: $\log_a u^v=v\cdot\log_a u$

$f(x)=e^{\ln(x)^{3x}}$

$f(x)=e^{3x\cdot\ln(x)}$

$f'(x)=(3x\cdot\ln(x))'\,e^{3x\cdot\ln(x)}$

$=\left(\underset{u'\cdot v}{3\cdot\ln(x)}+\underset{u\cdot v'}{3x\cdot\frac{1}{x}}\right)\cdot e^{3x\ln(x)}=(3\ln(x)+3)\cdot e^{3x\ln(x)}$

$=(3\ln(x)+3)\cdot x^{(3x)}$

6.3 Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich an der Stelle x differenzierbar und es gilt $v(x)\neq0$, dann gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4}$$

Definition 3.1: Kettenregel

Mittels der Kettenregel lässt sich die Ableitung zweier miteinander verketteter, differenzierbarer Funktionen f und g bestimmen. Es gilt:

$$(f(g(x))'=g(x)'\cdot f'(g(x))$$

Merke: Innere Ableitung · äußere Ableitung (mit innerer Funktion eingesetzt).

Übungen zur Ableitung mittels Kettenregel:

$f(x)=(3x+1)^5 \qquad f(x)=e^{x^2+2x}$

$f'(x)= \qquad f'(x)=$

6.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Offensichtlich gilt

$$x=f(f^{-1}(x))$$

Ableiten unter Verwendung der Kettenregel liefert als Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

Merke:

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Übungen zur Ableitung der Umkehrfunktion:

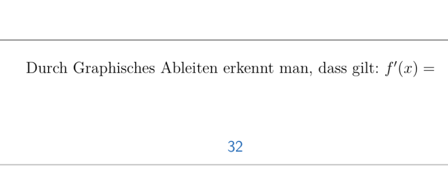
$f^{-1}(x)=ln(x) \qquad f^{-1}(x)=arcsin(x)$

$(f^{-1})'(x)= \qquad (f^{-1})'(x)=$

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

7.1 Die $sin(x)$-Funktion

Die Sinusfunktion $f(x)=sin(x)$ ist eine sogenannte trigonometrische Funktion. Man erhält den Graphen, indem man abhängig von dem Winkel x, der auf der x-Achse abgetragen wird, die Länge der Gegenkathete des Winkels x im Einheitskreis, also den $sin(x)$, als y-Wert einträgt (vgl. Animation auf Wikipedia [14]):



Eigenschaften der Sinus-Funktion:

Definitionsbereich:	Nullstellen:
Wertebereich:	Extremstellen:
y-Achsenschnitt:	Wendestellen:
Symmetrie:	

Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x)=$

Definition 1.1: Ableitungskreislauf für Sinus/Cosinus

Es gilt:

Eigenschaften der Kosinusfunktion:

Definitionsbereich:	Nullstellen:
Wertebereich:	Extremstellen:
y-Achsenschnitt:	Wendestellen:
Symmetrie:	

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$f(x)=\cos(x) \qquad f(x)=10\sin(x) \qquad f(x)=e^x\cdot\sin(x)$

$f'(x)= \qquad f'(x)= \qquad f'(x)=$

$f(x)=\sin(x^2) \qquad f(x)=\sin^2(x) \qquad f(x)=\tan(x)$

$f'(x)= \qquad f'(x)= \qquad f'(x)=$