



Dr. Markus Schröder



Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Exponentialgleichungen

- Aufgabe 1** Berechnen Sie jeweils die unbekannte Größe x.
- (a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$

(b) $\log_x 16 = 4$

(c) $\log_4 (5x - 1) = -1$

(d) $\log_x (x + 6) = 2$

(e) $\log_5 x^2 = 3$
- Aufgabe 2** Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in $\mathbb{R}$.
- (a) $2^x = 5$

(b) $3^{4x} = 5$

(c) $4^{2x+1} = 5$
- Aufgabe 3** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Exponentialgleichungen.
- (a) $3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$

(b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$
- Aufgabe 4** Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ folgender Exponentialgleichungen.
- (a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$

(b) $2^x + 4 = 32 \cdot 2^{-x}$
- Spezialfall $\Rightarrow$ (c) $2^{x-1} = 2^{4x-5}$ Exponenten müssen gleich sein
 $x-1 = 4x-5 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Logarithmengleichungen.

(a) $\ln x^5 = \ln x^2 + 6$

(b) $\frac{1}{3} \lg x^2 + \frac{1}{2} \lg x^3 = \frac{2}{100}$
- | | |
|---|--|
| Logarithmengesetze für $a > 0, a \neq 1, x > 0$ und $y > 0$ | |
| 1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y),$ | |
| 2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y),$ | |
| 3. $\log_a (x^n) = n \cdot \log_a (x),$ | |
| $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a (x),$ | |
| Die wichtigsten Potenzgesetze | |
| Multiplikation und Division bei gleichen Basen: | |
| 1. $\frac{a^m \cdot a^n}{a^p} = a^{m+n-p}$ | $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Q}$ |
| 2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Q}$ |
| bei gleichen Exponenten | |
| $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ | $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Q}$ |
| $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ | $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Q}$ |
| Potenzieren von Potenzen | 3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Q}$ |
| Radizieren von Potenzen | $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ |
| Folgerungen aus den Potenzgesetzen: | $a^0 = 1, \frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Q}$ |
- $$\begin{aligned} \text{a) } \ln x^5 - \ln x^2 &= 6 \quad | 2. \text{ Log. Gez.} \\ \ln \left(\frac{x^5}{x^2}\right) &= 6 \\ \ln x^3 &= 6 \quad | e^{} \\ x^3 &= e^6 \quad | \sqrt[3]{} \hat{=} \frac{1}{3} \\ (x^{\frac{1}{3}})^3 &= (e^6)^{\frac{1}{3}} \\ x &= e^{6 \cdot \frac{1}{3}} = \underline{\underline{e^2}} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 5 \ln x &= 2 \ln x + 6 \quad | -2 \ln x \\ 3 \ln x &= 6 \quad | : 3 \\ \ln x &= 2 \quad | e^{} \\ \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{e^2}} \end{aligned}$$
- $$\text{① a) } \log_{25} x = -\frac{1}{2} \quad | 25^{}$$

$$\cancel{25}^{\log} x = 25^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$
- $$\text{② a) } 2^x = 5 \quad | \ln$$

$$\ln 2^x = \ln 5 \quad | 3. \text{ Log. Gez.}$$

$$x \cdot \ln 2 = \ln 5 \quad | : \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32$$

$$\text{c) } 4^{2x+1} = 5 \quad | \ln$$

$$(2x+1) \cdot \ln 4 = \ln 5 \quad | : \ln 4$$

$$2x+1 = \frac{\ln 5}{\ln 4} \quad | -1$$

$$2x = \frac{\ln 5}{\ln 4} - 1 \quad | : 2$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 5}{\ln 4} - 1 \right) \approx 0,08$$

$$\text{③ a) } 3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 84$$

$$3^x \cdot (3^{-1} + 3^2) = 84$$

$$3^x = \frac{84}{3^{-1} + 3^2}$$

$$= \frac{84}{\frac{1}{3} + 9} = \frac{84}{\frac{28}{3}} = 84 \cdot \frac{3}{28} = 9$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 9$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$$
- $$\text{③ b) } 2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$$

$$2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^2 = 34$$

$$2^x \cdot (2^{-2} + 2^2) = 34$$

$$2^x = \frac{34}{(2^{-2} + 2^2)}$$

$$2^x = \frac{34}{\frac{1}{4} + 4} = \frac{34}{\frac{17}{4}} = \frac{34 \cdot 4}{17} = 8$$

$$\underline{\underline{x=3}}$$
- $$\underline{\underline{x=}}$$