



Dr. Markus Schröder

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Exponentialgleichungen

① a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2} \quad | 25^x$
 $25^{-\frac{1}{2}} = 25^{-\frac{1}{2}}$
 $x = 25^{-\frac{1}{2}}$
 $x = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

Aufgabe 1 Berechnen Sie jeweils die unbekannte Größe x.

(a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ (b) $\log_x 16 = 4$ (c) $\log_4 (5x-1) = -1$
(d) $\log_x (x+6) = 2$ (e) $\log_5 x^2 = 3$

Aufgabe 2 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in $\mathbb{R}$.

(a) $2^x = 5$ (b) $3^{4x} = 5$ (c) $4^{2x+1} = 5$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Exponentialgleichungen.

(a) $3^{x-1} + 3^{x+2} = 84$ (b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$
 $3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 84 \Leftrightarrow 3^x \cdot (3^{-1} + 3^2) = 84 \Leftrightarrow 3^x = \frac{84}{3^{-1} + 3^2} \Leftrightarrow 3^x = \frac{84}{\frac{1}{3} + 9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{84}{\frac{28}{3}} \Leftrightarrow 3^x = \frac{84 \cdot 3}{28} \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ folgender Exponentialgleichungen.

(a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$ (b) $2^x + 4 = 32 \cdot 2^{-x}$
 $2^{2x} = 4^x$
 $4^x - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$
 $2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$
 $z^2 - 35z + 24 = 0$
 $z = 3 \text{ oder } z = 12$
 $2^x = 3 \text{ oder } 2^x = 12$
 $x = \log_2 3 \text{ oder } x = \log_2 12$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Logarithmgleichungen.

(a) $\ln x^5 = \ln x^2 + 6$ (b) $\frac{1}{3} \lg x^2 + \frac{1}{2} \lg x^3 = \frac{2}{100}$
 $5 \ln(x) = 2 \ln(x) + 6 \quad | -2 \ln(x)$
 $3 \ln(x) = 6 \quad | :3$
 $\ln(x) = 2 \quad | e^{}$
 $x = e^2$

Die wichtigsten Potenzgesetze

Multiplikation und Division bei gleichen Basen:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

bei gleichen Exponenten:

- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Potenzieren von Potenzen:

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Radizieren von Potenzen:

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Folgerungen aus den Potenzgesetzen:

- $a^0 = 1$
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Quelle: <https://123mathe.de/exponentialgleichungen-loesen-regeln>

b) $\log_x 16 = 4 \quad | x^x$
 $x^4 = 16$
 $x = 2 \text{ oder } x = -2$
 ~~$x = -2$~~ nur positive Basen erlaubt

c) $\log_4 (5x-1) = -1 \quad | 4^x$
 $5x-1 = 4^{-1}$
 $5x = \frac{1}{4} + 1$
 $5x = \frac{5}{4}$
 $x = \frac{1}{4}$

d) $\log_x (x+6) = 2 \quad | x^x$
 $x+6 = x^2 \quad | -x^2$
 $-x^2 + x + 6 = 0 \quad | :(-1)$
 $x^2 - x - 6 = 0 \quad | \text{PQ}$
 $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{1}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$
 $x_1 = 3 \text{ oder } x_2 = -2$
 ~~$x_2 = -2$~~

e) $\log_5 x^2 = 3 \quad | 5^x$
 $x^2 = 5^3$
 $x^2 = 125$
 $x = \pm \sqrt{125}$

② a) $2^x = 5 \quad | \ln$
 $\ln(2^x) = \ln(5)$
 $x \cdot \ln(2) = \ln(5)$
 $x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2,32$

b) $3^{4x} = 5 \quad | \ln$
 $4x \cdot \ln(3) = \ln(5)$
 $x = \frac{\ln(5)}{4 \cdot \ln(3)} \approx 0,366$

c) $4^{2x+1} = 5 \quad | \ln$
 $(2x+1) \cdot \ln(4) = \ln(5)$
 $2x+1 = \frac{\ln(5)}{\ln(4)}$
 $2x = \frac{\ln(5)}{\ln(4)} - 1$
 $x = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(5)}{\ln(4)} - 1 \right) \approx 0,08$

③ b) $2^{x-2} + 2^{x+2} = 34$
 $2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^2 = 34$
 $2^x \cdot (2^{-2} + 2^2) = 34$
 $2^x \cdot \left(\frac{1}{4} + 4 \right) = 34$
 $2^x \cdot \frac{17}{4} = 34$
 $2^x = \frac{34 \cdot 4}{17} = 8$
 $x = 3$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$2^{2x} = (2^x)^2$

④ a) $4 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$
 $4 \cdot (2^x)^2 - 35 \cdot 2^x + 24 = 0$
Substitution $z = 2^x$
 $4 \cdot z^2 - 35z + 24 = 0 \quad | :4$
 $z^2 - \frac{35}{4}z + 6 = 0 \quad | \text{PQ}$
 $z_1 = 8 \quad z_2 = \frac{3}{4}$
 $2^x = 8 \quad | \ln$
 $x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = 3$