

6.3 Quotientenregel

(wenn u und v in einem gemeinsamen Definitionsbereich an der Stelle x differenzierbar und $v(x) \neq 0$, dann gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 4}$$
$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x^4 - 4) - (x^2 + 1) \cdot (x^4 - 4)'}{(x^4 - 4)^2} = \frac{(2x) \cdot (x^4 - 4) - (x^2 + 1) \cdot 4x^3}{(x^4 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 8x - 4x^5 - 4x^3}{(x^4 - 4)^2} = \frac{-2x^5 - 4x^3 - 8x}{(x^4 - 4)^2}$$

Definition 3.1: Kettenregel

Mittels der Kettenregel lässt sich die Ableitung zweier miteinander verketteter, differenzierbarer Funktionen f und g bestimmen. Es gilt:

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

Merke: **Äußere Ableitung** (äußere Ableitung) (mit innerer Funktion abgeleitet).

Übungen zur Ableitung mittels Kettenregel:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

6.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Offensichtlich gilt: $x = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$

Ableiten unter Verwendung der Kettenregel liefert als Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Merke: Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Übungen zur Ableitung der Umkehrfunktion:

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x \Rightarrow (f^{-1})'(x) = e^x$$
$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

7.1 Die $\sin(x)$ -Funktion

Die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist eine sogenannte trigonometrische Funktion. Man erhält den Graphen, indem man abhängig vom Winkel x , der auf der x -Achse abgetragen wird, die Länge der Gegenkathete des Winkels x im Einheitskreis, also den $\sin(x)$, als y -Wert entnimmt (vgl. Animation auf Wikipedia [14]):



Eigenschaften der Sinus-Funktion:

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Nullstellen: $x_n = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Wertebereich: $\mathbb{W} = [-1; 1]$ Extremstellen: $x_E = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

y-Achsenabschnitt: $S_y(0|0)$ Wendestellen: $x_W = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Symmetrie: $f(x) = \sin(x)$ ist ungerade

Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x) = \cos(x)$

Definition 1.1: Ableitungsreislauf für Sinus/Cosinus

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \\ \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \end{aligned}$$

Eigenschaften der Kosinusfunktion:

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Nullstellen: $x_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Wertebereich: $\mathbb{W} = [-1; 1]$ Extremstellen: $x_E = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

y-Achsenabschnitt: $S_y(0|1)$ Wendestellen: $x_W = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Symmetrie: $f(x) = \cos(x)$ ist gerade

Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x) = -\sin(x)$

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot (-\sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot \cos(x) - 1 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot \sin(x) - 1 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$f(x) = \tan^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2 \tan(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2 \cot(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2 \sec(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2 \csc(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^3(x) \Rightarrow f'(x) = 3 \tan^2(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^3(x) \Rightarrow f'(x) = 3 \cot^2(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^3(x) \Rightarrow f'(x) = 3 \sec^2(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^3(x) \Rightarrow f'(x) = 3 \csc^2(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^4(x) \Rightarrow f'(x) = 4 \tan^3(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^4(x) \Rightarrow f'(x) = 4 \cot^3(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^4(x) \Rightarrow f'(x) = 4 \sec^3(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^4(x) \Rightarrow f'(x) = 4 \csc^3(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^5(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \tan^4(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^5(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \cot^4(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^5(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \sec^4(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^5(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \csc^4(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^6(x) \Rightarrow f'(x) = 6 \tan^5(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^6(x) \Rightarrow f'(x) = 6 \cot^5(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^6(x) \Rightarrow f'(x) = 6 \sec^5(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^6(x) \Rightarrow f'(x) = 6 \csc^5(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^7(x) \Rightarrow f'(x) = 7 \tan^6(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^7(x) \Rightarrow f'(x) = 7 \cot^6(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^7(x) \Rightarrow f'(x) = 7 \sec^6(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^7(x) \Rightarrow f'(x) = 7 \csc^6(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^8(x) \Rightarrow f'(x) = 8 \tan^7(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^8(x) \Rightarrow f'(x) = 8 \cot^7(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^8(x) \Rightarrow f'(x) = 8 \sec^7(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^8(x) \Rightarrow f'(x) = 8 \csc^7(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^9(x) \Rightarrow f'(x) = 9 \tan^8(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^9(x) \Rightarrow f'(x) = 9 \cot^8(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^9(x) \Rightarrow f'(x) = 9 \sec^8(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^9(x) \Rightarrow f'(x) = 9 \csc^8(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{10}(x) \Rightarrow f'(x) = 10 \tan^9(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{10}(x) \Rightarrow f'(x) = 10 \cot^9(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{10}(x) \Rightarrow f'(x) = 10 \sec^9(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{10}(x) \Rightarrow f'(x) = 10 \csc^9(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{11}(x) \Rightarrow f'(x) = 11 \tan^{10}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{11}(x) \Rightarrow f'(x) = 11 \cot^{10}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{11}(x) \Rightarrow f'(x) = 11 \sec^{10}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{11}(x) \Rightarrow f'(x) = 11 \csc^{10}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{12}(x) \Rightarrow f'(x) = 12 \tan^{11}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{12}(x) \Rightarrow f'(x) = 12 \cot^{11}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{12}(x) \Rightarrow f'(x) = 12 \sec^{11}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{12}(x) \Rightarrow f'(x) = 12 \csc^{11}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{13}(x) \Rightarrow f'(x) = 13 \tan^{12}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{13}(x) \Rightarrow f'(x) = 13 \cot^{12}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{13}(x) \Rightarrow f'(x) = 13 \sec^{12}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{13}(x) \Rightarrow f'(x) = 13 \csc^{12}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{14}(x) \Rightarrow f'(x) = 14 \tan^{13}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{14}(x) \Rightarrow f'(x) = 14 \cot^{13}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{14}(x) \Rightarrow f'(x) = 14 \sec^{13}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{14}(x) \Rightarrow f'(x) = 14 \csc^{13}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{15}(x) \Rightarrow f'(x) = 15 \tan^{14}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{15}(x) \Rightarrow f'(x) = 15 \cot^{14}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{15}(x) \Rightarrow f'(x) = 15 \sec^{14}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{15}(x) \Rightarrow f'(x) = 15 \csc^{14}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{16}(x) \Rightarrow f'(x) = 16 \tan^{15}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{16}(x) \Rightarrow f'(x) = 16 \cot^{15}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{16}(x) \Rightarrow f'(x) = 16 \sec^{15}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{16}(x) \Rightarrow f'(x) = 16 \csc^{15}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{17}(x) \Rightarrow f'(x) = 17 \tan^{16}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{17}(x) \Rightarrow f'(x) = 17 \cot^{16}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{17}(x) \Rightarrow f'(x) = 17 \sec^{16}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{17}(x) \Rightarrow f'(x) = 17 \csc^{16}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{18}(x) \Rightarrow f'(x) = 18 \tan^{17}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{18}(x) \Rightarrow f'(x) = 18 \cot^{17}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{18}(x) \Rightarrow f'(x) = 18 \sec^{17}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{18}(x) \Rightarrow f'(x) = 18 \csc^{17}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{19}(x) \Rightarrow f'(x) = 19 \tan^{18}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{19}(x) \Rightarrow f'(x) = 19 \cot^{18}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{19}(x) \Rightarrow f'(x) = 19 \sec^{18}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{19}(x) \Rightarrow f'(x) = 19 \csc^{18}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{20}(x) \Rightarrow f'(x) = 20 \tan^{19}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{20}(x) \Rightarrow f'(x) = 20 \cot^{19}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{20}(x) \Rightarrow f'(x) = 20 \sec^{19}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{20}(x) \Rightarrow f'(x) = 20 \csc^{19}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{21}(x) \Rightarrow f'(x) = 21 \tan^{20}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{21}(x) \Rightarrow f'(x) = 21 \cot^{20}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{21}(x) \Rightarrow f'(x) = 21 \sec^{20}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{21}(x) \Rightarrow f'(x) = 21 \csc^{20}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{22}(x) \Rightarrow f'(x) = 22 \tan^{21}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{22}(x) \Rightarrow f'(x) = 22 \cot^{21}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{22}(x) \Rightarrow f'(x) = 22 \sec^{21}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{22}(x) \Rightarrow f'(x) = 22 \csc^{21}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{23}(x) \Rightarrow f'(x) = 23 \tan^{22}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{23}(x) \Rightarrow f'(x) = 23 \cot^{22}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{23}(x) \Rightarrow f'(x) = 23 \sec^{22}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{23}(x) \Rightarrow f'(x) = 23 \csc^{22}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{24}(x) \Rightarrow f'(x) = 24 \tan^{23}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{24}(x) \Rightarrow f'(x) = 24 \cot^{23}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{24}(x) \Rightarrow f'(x) = 24 \sec^{23}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{24}(x) \Rightarrow f'(x) = 24 \csc^{23}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{25}(x) \Rightarrow f'(x) = 25 \tan^{24}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{25}(x) \Rightarrow f'(x) = 25 \cot^{24}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{25}(x) \Rightarrow f'(x) = 25 \sec^{24}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{25}(x) \Rightarrow f'(x) = 25 \csc^{24}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{26}(x) \Rightarrow f'(x) = 26 \tan^{25}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{26}(x) \Rightarrow f'(x) = 26 \cot^{25}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{26}(x) \Rightarrow f'(x) = 26 \sec^{25}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{26}(x) \Rightarrow f'(x) = 26 \csc^{25}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{27}(x) \Rightarrow f'(x) = 27 \tan^{26}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{27}(x) \Rightarrow f'(x) = 27 \cot^{26}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{27}(x) \Rightarrow f'(x) = 27 \sec^{26}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{27}(x) \Rightarrow f'(x) = 27 \csc^{26}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{28}(x) \Rightarrow f'(x) = 28 \tan^{27}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{28}(x) \Rightarrow f'(x) = 28 \cot^{27}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{28}(x) \Rightarrow f'(x) = 28 \sec^{27}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{28}(x) \Rightarrow f'(x) = 28 \csc^{27}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{29}(x) \Rightarrow f'(x) = 29 \tan^{28}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{29}(x) \Rightarrow f'(x) = 29 \cot^{28}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{29}(x) \Rightarrow f'(x) = 29 \sec^{28}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{29}(x) \Rightarrow f'(x) = 29 \csc^{28}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{30}(x) \Rightarrow f'(x) = 30 \tan^{29}(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = \cot^{30}(x) \Rightarrow f'(x) = 30 \cot^{29}(x) \cdot (-\csc^2(x))$$

$$f(x) = \sec^{30}(x) \Rightarrow f'(x) = 30 \sec^{29}(x) \cdot \sec(x) \tan(x)$$

$$f(x) = \csc^{30}(x) \Rightarrow f'(x) = 30 \csc^{29}(x) \cdot (-\csc(x) \cot(x))$$

$$f(x) = \tan^{31}(x) \Rightarrow f'(x) = 31 \tan^{30}(x) \cdot \sec^2(x)$$