



Blatt6-
Uebungen...

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 1

$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

a) $\int (x^3 + 2x - 4) dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x + C$

d) $\int (e^x + x^2) dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + C$

g) $\int (\cos(x) - e^{-x} + 1) dx = \sin(x) + e^{-x} + x + C$

j) $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$

Aufgabe 2

Swimmingpool
Ein quaderförmiger Swimmingpool mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft beschrieben durch die Zulaufatenfunktion mit

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$; $0 \leq t \leq 9$

(f(t) in m³ pro Stunde, t in Stunden)

a) Gib die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu noch abfließt, und berechne die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

b) Skizziere den Graphen der Zulaufatenfunktion f.

c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Pool?

d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m³ beträgt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Integrale durch partielle Integration.

a) $\int x \cdot e^{2x} dx$

b) $\int x^2 \sin(3x) dx$

c) $\int \sin^2(x) dx$

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Input: $t^3 - 13t^2 + 40t$

Plots: $f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

Roots: $t = 0, 5, 8$

Local maximum: $\max(t^3 - 13t^2 + 40t) = 36$ at $t = 2$

Local minimum: $\min(t^3 - 13t^2 + 40t) = -\frac{400}{27}$ at $t = \frac{20}{3}$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=0$ to $t=5$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=5$ to $t=8$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=8$ to $t=9$

Definite integrals:

$\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$

$\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = -\frac{117}{4} = -29.25$

$\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale durch geeignete Substitutionen.

a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(16 + 2x^2)^3}}$

b) $\int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$

c) $\int 3x \cdot \sin(x^2 + 1) dx$

d) $\int \frac{3}{3x+1} dx$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Integrale durch Partialbruchzerlegung.

a) $\int \frac{6x + 10}{x^2 + 2x - 3} dx$

b) $\int \frac{3x^5 + 2x^4 + 3x^3}{x^4 - 1} dx$

c) $\int \frac{6x^2 - 4x - 7}{x^3 - 3x - 2} dx$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren.

a) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$

b) $\int_0^1 \ln(2x) dx$

c) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Input: $t^3 - 13t^2 + 40t$

Plots: $f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

Roots: $t = 0, 5, 8$

Local maximum: $\max(t^3 - 13t^2 + 40t) = 36$ at $t = 2$

Local minimum: $\min(t^3 - 13t^2 + 40t) = -\frac{400}{27}$ at $t = \frac{20}{3}$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=0$ to $t=5$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=5$ to $t=8$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=8$ to $t=9$

Definite integrals:

$\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$

$\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = -\frac{117}{4} = -29.25$

$\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$

Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Volumen V der Rotationskörper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen:

a) $f(x) = \frac{1}{h}x$, $0 \leq x \leq h$

b) $f(x) = 4\sqrt{x}$, $[0; 4]$

Technische Hochschule Georg Agricola

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen zur Integralrechnung

Input: $t^3 - 13t^2 + 40t$

Plots: $f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

Roots: $t = 0, 5, 8$

Local maximum: $\max(t^3 - 13t^2 + 40t) = 36$ at $t = 2$

Local minimum: $\min(t^3 - 13t^2 + 40t) = -\frac{400}{27}$ at $t = \frac{20}{3}$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=0$ to $t=5$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=5$ to $t=8$

Integrate $t^3 - 13t^2 + 40t$ From $t=8$ to $t=9$

Definite integrals:

$\int_0^5 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{1375}{12} \approx 114.58$

$\int_5^8 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = -\frac{117}{4} = -29.25$

$\int_8^9 (t^3 - 13t^2 + 40t) dt = \frac{191}{12} \approx 15.917$

- CAS Computer Algebra System
- d) Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.
- e) Berechne die maximale Wassermenge im Pool.
- f) Bestimmen Sie die Gesamtmenge an Wasser, die zu- bzw. abgelaufen ist. (wieviel Wasser insgesamt beigefügt wurde)
- g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die neu hinzugeflossene Wassermenge erstmals 16 m³ beträgt.

d) $V_3 = V_0 + \int_0^3 f(t) dt = 105,25 m^3 \Rightarrow h \cdot 5 \cdot 8 = 105,25$

e) $V_{max} = V_0 + \int_0^5 f(t) dt$, da $|II| > III$

f) $V_{gesamt\ befreit} = \int_0^5 + \int_5^8 + \int_8^9$

g) $\int_0^b f(t) dt = 16$

$\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2 \right]_0^b = 16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{13}{3} \cdot 0^3 + 20 \cdot 0^2 \right) = 16$

$\frac{1}{4}b^4 - \frac{13}{3}b^3 + 20b^2 - 16 = 0$

↳ hat keine ganz-zahlige Lösung
↳ handschriftlich mit mehr Leichtigkeit
↳ numerische Lösung

$b \approx 0.82118$ mit im Definitionsbereich
 $b \approx 1.0030$

3

b) $\int \sqrt{x} \cdot \sin(2x) dx$

Partiell integrieren

$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$

$u = \sqrt{x}$, $v' = \sin(2x)$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$\int \sqrt{x} \cdot \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \cos(2x) - \int \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x) \right) dx$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{x} \cos(2x) - \frac{1}{4} \int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}} dx$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{x} \cos(2x) - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2}\sin(2x) \right] + C$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{x} \cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x) + C$

c) $\int \sin(x) \cdot \sin(x) dx$

$= \int \sin^2(x) dx$

$= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx$

$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx$

$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\sin(2x) \right) + C$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

6

VS vom Nenner

$x=1$ doppelt

$x=2$ einfach

$\frac{6x^2 - 4x - 7}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$

Nur noch Zähler betrachten und WS einsetzen:

$x=2$: $6 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 7 = A(2+1)^2 + B(2+1) + C(2-2)$

$3 = 9A + 3B$

$1 = 3A + B$

$x=-1$: $6(-1)^2 - 4(-1) - 7 = A(-1+1)^2 + B(-1+1) + C(-1-2)$

$3 = 0 + 0 - 3C$

$-1 = -3B$

$1 = 3B$

ZB: $x=1$: $6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 7 = A(1+1)^2 + B(1+1) + C(1-2)$

$-5 = 4A + 2B - C$

$-10 = -2B - C$

$15 = 3B$

$-\int (x+1)^{-2} dx = -\frac{1}{(x+1)^{-1}} = \frac{1}{(x+1)^1}$

Damit $\Rightarrow \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{5}{x+1} dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2} dx$

$\ln|x-2| + 5 \cdot \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$