28.02.2026

Sonntag, 22. Februar 2026 12:43

9 Summen und Reihen

Bsp: $\sum_{i=1}^{4} \boxed{2i} = \underset{i=1}{2\cdot 1} + \underset{i=2}{2\cdot 2} + \underset{i=3}{2\cdot 3} + \underset{i=4}{2\cdot 4}$

9.1 Gauß'sche Summenformel

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \sum_{i=1}^{10} i$$

Ende

$a_i = i$

Startwert

Laufvariable (Index)

Wie lautet die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen?

$$\sum_{i=1}^{100} i = ?$$

1+2+3+4+5+...+49+50+51+...+95+96+97+98+99+100

101

101

101

101

Allgemein für die Summe der natürlichen Zahlen bis n ergibt sich die Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$n=100$

$$= \frac{\cancel{100}\cdot(100+1)}{\cancel{2}} = 50\cdot(101) = 5050$$

Abbildung 9.1: Carl Friedrich Gauß [9], 1777-1855

Wie kann man die Allgemeingültigkeit dieser Formel beweisen?

9.1.1 Vollständige Induktion

Beweise von Aussagen über natürliche Zahlen erfolgen oft mittels des Beweisverfahrens namens Vollständige Induktion.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

1. Induktionsanfang:
Bestätige die Vermutung für das kleinste n:

Für $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓

2. Induktionsschritt von n nach $n+1$:
Man nimmt an (und darf dabei verwenden), dass die Aussage für n gilt und versucht, durch Umformungen die Aussage für $n+1$ herzuleiten:

Zu zeigen (Formel gilt auch für n+1): $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$

ersetze n durch n+1

Start $\Rightarrow$ Ziel

durch Umformung, dabei darf man die Formel n, die sog. Induktionsvoraussetzung verwenden $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Trick:

letzte Summand

$$\underset{\text{Start}}{\sum_{i=1}^{n+1} i} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2\cdot(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \underset{\text{Ziel}}{\frac{(n+1)\cdot\overset{(n+2)}{((n+1)+1)}}{2}}$$ ✓

Trick: letzten Summanden abgespalten

9.2 Lineare Regression

1. Ist der Zusammenhang zwischen x und y aus der Theorie bekannt, setzt man entsprechend an.

2. Man orientiert sich an der Punktwolke und sucht einen sinnvollen Funktionstyp als Ansatz.

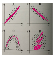
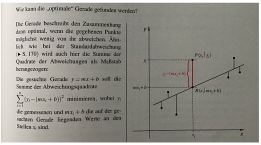


Abbildung 9.2: Messpunkte



Wie kann die „optimale" Gerade gefunden werden?

Die Gerade beschreibt den Zusammenhang dann optimal, wenn die gegebenen Punkte möglichst wenig von ihr abweichen. Ähnlich wie bei der Standardabweichung (▶ S. 170) wird auch hier die Summe der Quadrate der Abweichungen als Maßstab herangezogen:

Die gesuchte Gerade $y = mx + b$ soll die Summe der Abweichungsquadrate $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$ minimieren, wobei y_i die gemessenen und $mx_i + b$ die auf der gesuchten Gerade liegenden Werte an den Stellen x_i sind.

Problem, in der obigen Summe der Abweichungsquadrate sind zwei Variablen m und b vorhanden.
Mehrdimensionale Analysis oder Matrizenrechnung wird dazu benötigt.
Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

und $b = \bar{y} - m\bar{x}$ (wobei $\bar{y}$ und $\bar{x}$ jeweils die arithmetischen Mittelwerte der y-Koordinaten bzw. x-Koordinaten sind).

Übung:
Gegeben sind die Punkte $P_1(-3,\ 14)$, $P_2(-2,\ 11)$, $P_3(0,\ 5)$, $P_4(2,\ -1)$ und $P_5(8,\ -19)$.
a) Bestimmen Sie die durch diese festgelegte Regressionsgerade.
b) Bestimmen Sie weiterhin den Korrelationskoeffizient.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y},$$

wobei

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}}$$

die Standardabweichung der x-Werte und s_y entsprechend für die y-Werte definiert ist. Liegt r betraglich nahe bei 1, so ist die Näherung gut, sonst schlecht. Was ist hier der Fall?

9.3 Wichtige Reihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (9.1)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \quad (9.2)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (9.3)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \quad (9.4)$$

10 Integralrechnung und ihre Anwendungen

10.1 Unbestimmte Integrale

Betrachtet wird nun die Umkehrung des Ableitens, das Aufleiten bzw. Integrieren:
Gegeben ist eine Funktion f, man sucht eine Funktion F von der diese abstammt, d.h.

Definition 1.1: Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion einer gegebenen Funktion f, falls gilt: $F'(x) = f(x)$.

gegeben: $f(x) = x^2$
gesucht: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$) F'
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4$
oder: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 300$
~~oder~~ alle: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$

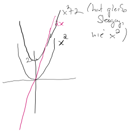
allgemein (Potenzregel):
$f(x) = x^n$
$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

Merke:
Der Exponent wird um 1 erhöht,
davor kommt der Kehrwert des erhöhten Exponenten

Schreibweise:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Variable der Funktion



(hat gleiche Steigung, wie x^3)

Definition 1.2: Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

gibt die Menge aller Stammfunktionen an. (gibt unendlich viele Stammfunktionen!)

$$\int (x^3 + 2x^2 + x + 3)\,dx$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$$

$$\int 3 \cdot x^4$$

"Faktoren kann man rausziehen"

$$3 \cdot \int x^4 dx$$
$$3 \cdot \frac{1}{5}x^5 = \frac{3}{5}x^5 + c$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + c$$

↑ direkt

Wie beim Differenzieren gilt auch beim Integrieren die Faktor und Summenregel.
Als erste Integrationsregel betrachten wir einen Spezialfall der Integration mittels Substitution:

Merke:

Bei einer verketteten Funktion, bei der die innere Funktion linear ist, schreibt man den Kehrwert der inneren Ableitung vor die aufgeleitete äußere Funktion (wobei die innere Funktion darin unverändert bleibt), z.B.:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c \qquad \int \cos(2x+1)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + c$$

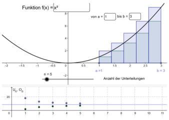
Kehrwert des Exponenten

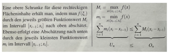
Kehrwert der inneren Abl.

Blatt 6 Ⓐ1

10.2 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte

Ziel ist die Bestimmung des Flächeninhalts, den der Graph einer Funktion f mit der x-Achse einschließt. Das bestimmte Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen (Darboux-Riemann-Integral) beruht auf der Idee, den Flächeninhalt mittels einfach zu berechnender Recktecksflächen anzunähern. Als Voraussetzung dafür reicht die Beschränktheit der Funktion f im Intervall $[a;b]$ und die dortige Stetigkeit bis auf endlich viele Ausnahmen.
Das Intervall $[a;b]$ wird dazu in n Teilintervalle $[x_{i-1};x_i]$ mit $i = 1, ..., n$ zerlegt [3][2].

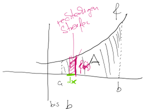




Eine obere Schranke für diese rechteckigen Flächeninhalte erhält man, indem man $f(\xi_i)$ durch den jeweils größten Funktionswert M_i im Intervall $[x_{i-1};x_i]$ nach oben abschätzt. Ebenso erfolgt eine Abschätzung nach unten durch den jeweils kleinsten Funktionswert m_i im Intervall $[x_{i-1};x_i]$.

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x)$$
$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x)$$
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})}_{U_n} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})}_{O_n}$$

Intuitive Deutung:



$$\int_a^{b} \boxed{f(x)}\,dx$$

Σ (langes S) ; y-Wert "Höhe" · "Breite" ; "kleines Stück auf x-Achse"

≙ Summe vieler kleiner rechteckiger Streifen im Intervall [a;b]

"Zwischenschritt"

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - \big(F(a)\big)$$

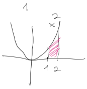
bis b

von a (untere Grenze)

obere Grenze in Stammfkt − untere Grenze in Stammfktn

$$\text{Bsp: } A = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ FE}$$

Flächeneinheiten

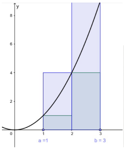


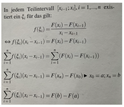
Definition 2.1: Bestimmtes Integral

Eine Funktion f im Intervall $[a;b]$ heißt **integrierbar**, wenn die Untersumme U_n und Obersumme O_n bei feiner werdender Zerlegung gegeneinander konvergieren. **Der gemeinsame Grenzwert heißt bestimmtes Integral von f** über $[a;b]$ und man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion F, lässt sich das bestimmte Integral mittels F berechnen. Da f die stetige Ableitung von F ist, lässt sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 4.1 auf die Stammfunktion F anwenden.




In jedem Teilintervall $[x_{i-1};x_i], i=1,\dots,n$ existiert ein ξ_i für das gilt:

$$f(\xi_i)=\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

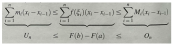
$$\Leftrightarrow f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=F(x_i)-F(x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=F(x_n)-F(x_0) \blacktriangleright x_0=a; x_n=b$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=F(b)-F(a)$$

Die inneren Summanden heben sich gegenseitig auf, so dasss nur noch $F(b)-F(a)$ überbleibt. Damit ist:


$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})}_{U_n} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})}_{F(b)-F(a)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})}_{O_n}$$

$$U_n \leq F(b)-F(a) \leq O_n$$

Somit muss der gemeinsame Grenzwert von Ober- und Untersumme $F(b)-F(a)$ betragen.

Mittels des Hauptsatzes der Integralrechnung besteht die Möglichkeit, Flächeninhalte, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, zu berechnen.

Definition 2.2: Hauptsatz der Integralrechnung

Sei f im Intervall $[a;b]$ **stetig und f habe eine Stammfunktion** F, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Das bestimmte Integral liefert die ......SUMME...... der ....orientierten Flächeninhalte.................... im Intervall $[a;b]$.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den der Graph von $f(x)=x^2-2x$ zwischen den Nullstellen mit der x-Achse einschließt.

$x^2-2x=0$

$x\cdot(x-2)=0$

$\underline{\underline{x=0}}$ oder $x-2=0$, $\underline{\underline{x=2}}$

Flächeninhalt ist negativ orientiert

$$\int_0^2 (x^2-2x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3-2^2-\cancel{\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-0^2\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\,8-4=\frac{8}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{4}{3}$$

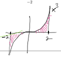
Tatsächliche Fläche $A=\left|-\frac{4}{3}\right|=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

b) Berechnen Sie

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\cdot 2^4-\left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4\right)$$

$$=\frac{16}{4}-\left(\frac{1}{4}\cdot 16\right)=\frac{16}{4}-\frac{16}{4}=\underline{\underline{0}}$$

und deuten Sie das Ergebnis.



aufgrund der Punktsymmetrie heben sich die gleich großen Flächen oberhalb u. unterhalb der x-Achse auf !

Merke:

Um den tatsächlich vorhandenen Gesamtflächeninhalt zu ermitteln, kann man
a) die Beträge der Teilintegrale bilden, wobei die Nullstellen die Trennstellen sind

$$A=\left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right|+\int_0^2 f(x)dx$$

b) ggf. Symmetrien ausnutzen

$$A=2\cdot\int_0^2 f(x)\,dx$$

, hier: $A=2\cdot\int_0^2 x^3dx=2\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$

$=2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 16\right)=\underline{\underline{8}}$

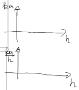
Merke:

Für die Einheit des Ergebnisses einer Integration gilt, dass die Einheiten der x-Achse und y-Achse miteinander multipliziert werden.

s(t)

ableiten ↓

v(t)

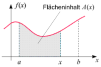


$\int \Rightarrow \cancel{h}\cdot\frac{km}{\cancel{h}}=\underline{\underline{km}}$

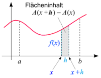
"aufleiten"

10.2.1 Stammfunktion als Flächeninhaltsfunktion

[4] $A(x)$ sei die Fläche unter dem Graphen einer stetigen Funktkion f zwischen der (festgehaltenen) Untergrenze a und einer (variablen) Obergrenze x im Intervall $[a;b]$. A kann somit als Flächeninhaltsfunktion bezeichnet werden. Die Fläche zwischen a und b ergibt sich dann als Funktionswert $A(b)$.



Es wird untersucht, wie sich A(x) unter einer kleinen Änderung von x verhält:



Ist h sehr klein, so ist dieser Streifen sehr schmal. Da f laut Voraussetzung stetig ist, sind alle Funktionswerte innerhalb des Intervalls $[x;x+h]$ ungefähr gleich groß (und werden einander immer ähnlicher, je kleiner h ist). Der Flächeninhalt des Streifens kann daher durch jenen eines Rechtecks mit Seitenlängen h und $f(x)$ approximiert werden:

$$A(x+h)-A(x)\approx h\cdot f(x)$$

Je kleiner h wird, um so genauer gilt diese Näherungsformel. Division durch h und Grenzwertbildung für $h\to 0$ liefert: $\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$ links steht die Ableitung von A(x), d.h. es gilt: $A'(x)=f(x)$, damit $A(x)=F(x)+c$

D.h. die Flächeninhaltsfunktion $A(x)$ ist also eine Stammfunktion von $f(x)$. Existiert eine Stammfunktion F, dann gilt:

$$A(x)=F(x)+c$$

Da $A(a)=0$ ist, folgt $c=-F(a)$, und die gesuchte Fläche $A(b)$ ist daher gleich

$$A(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)$$

Sei f im Intervall $[a;b]$ **stetig und f habe eine Stammfunktion** F, dann ergibt sich der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

.

Merke:

Für die Einheit des Ergebnisses einer Integration gilt, dass die Einheiten der x-Achse und y-Achse miteinander multipliziert werden.

10.3 Partielle Integration

Diese Integrationsregel kann man als Produktregel der Integration auffassen und ergibt sich aus dieser:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \quad \Big| \int$$

$$\cancel{\int}(u\cdot v)^{\cancel{\prime}} = \int(u'\cdot v + u\cdot v')$$

$$u\cdot v = \int u'\cdot v + \int u\cdot v' \quad \Big| -\int u\cdot v' \iff u\cdot v - \int u\cdot v' = \int u'\cdot v$$

Definition 3.1: Partielle Integration

Die Funktionen u und v seien im Intervall $[a;b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

gegebene Aufgabe

$$\boxed{\int u'\cdot v\,dx} = u\cdot v - \int u\cdot v'\,dx$$

Merke: Wähle v als die Funktion, die sich beim Ableiten vereinfacht.

abbaut

Beispiele:

a)

$$\boxed{\int e^x\cdot 3x\,dx} = \underbrace{e^x\cdot 3x}_{u\cdot v} - \boxed{\int e^x\cdot 3\,dx}$$

u' ✓

Restintegral ⇒ ist jetzt einfach zu lösen

$$= 3xe^x - 3\cdot\underbrace{\int e^x dx}_{e^x} = 3xe^x - 3e^x + c$$

b)

$$\boxed{\int 2x\cdot\sin(x)\,dx} = \underbrace{-\cos(x)\cdot 2x}_{u\cdot v} - \underbrace{\int -\cos(x)\cdot 2\,dx}_{u\cdot v'}$$

✓ u'

$$= -2x\cos(x) - (-2)\cdot\int\cos(x)\,dx$$

$$= -2x\cos(x) + 2\cdot\underbrace{\int\cos(x)\,dx}_{\sin(x)}$$

$$= -2x\cos(x) + 2\cdot\sin(x) + C$$

Blatt 6

③ a)

$$\int \underset{v}{x}\cdot \underset{u'}{e^{2x}}\,dx = \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot x}_{u\cdot v} - \int \underset{u}{\tfrac{1}{2}e^{2x}}\cdot \underset{v'}{1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{2}\cdot\underbrace{\int e^{2x}dx}_{\frac{1}{2}e^{2x}}$$

Restintegral

$$= \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + c$$

Notationen für Ableitungen:

$z \downarrow z'$	$z \downarrow \frac{dz}{dx}$	$z \downarrow \dot{z}$

dz nach dx

10.4 Integration mittels Substitution

Dieses Integrationsverfahren wird meist bei verketteten Funktionen angewendet. Man kann versuchen die innere Funktion zu substituieren (insbesondere, falls dessen Ableitung im Funktionsterm vorkommt).

Beispiele:

a)

Problem: Typ: $e^{\pm x^2\dots}$ besitzt keine elementare Stammfkt, die sich aus bekannten Funktionen zusammensetzt

$$\int \underset{v}{(2x+1)}\cdot \underset{u'}{e^{x^2+x-4}}\,dx = e^{x^2+x-4} + C$$

substituieren

$z(x) = x^2+x-4$ ableiten

$z'(x) \mathrel{\hat=} \frac{dz}{dx} = 2x+1$ nach dx umformen

$\boxed{\frac{dz}{2x+1} = dx}$ ins Integral

$$\int \cancel{(2x+1)}e^z\frac{dz}{\cancel{2x+1}} = \int e^z dz$$

$$= e^z + c$$

Ziel: Am Ende darf nur noch z vorkommen und das Integral sollte einfacher werden

Zurück substituieren

Als wichtiger Spezialfall gilt:

b)

$$\int\frac{AbleitungNenner}{Nenner} = ln|Nenner| + c$$

$$\text{z.B.: } \int\frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + c \quad \text{oder} \quad \int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \ln|\sin(x)| + c$$

10.5 Partialbruchzerlegung

Zweck: Integration von echt gebrochen rationalen Funktionen. Grad Zähler < Grad Nenner, falls nicht vorher Polynomdivision!

Idee: Mittels Partialbruchzerlegung wird der Bruch in einfacher zu integrierende Teilbrüche zerlegt (siehe oben).

Der Ansatz für die gesuchten Partialbrüche ist abhängig von der Anzahl und Art der Nullstellen des Nenners, es gilt:

Art der Nullstelle	Ansatz	
jede einfache NS x_n $x_1=1$, $x_2=2$	$\frac{A}{x-x_n}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$
doppelte NS x_n $x_1=3$ doppelt	$\frac{B}{x-x_n}+\frac{C}{(x-x_n)^2}$	$\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$
komplexe NS x^2+1	$\frac{Dx+E}{x^2+k}, k>0$	$\frac{Dx+E}{x^2+1}$

Blatt 6

c)

$$\int 3x\cdot\sin(x^2+1)\,dx = -\tfrac{3}{2}\cos(x^2+1) + c$$

$\boxed{z = x^2+1}$

$\frac{dz}{dx} = 2x$

$\boxed{\frac{dz}{2x} = dx}$

$$\int 3\cancel{x}\cdot\sin(z)\frac{dz}{2\cancel{x}} = \int\tfrac{3}{2}\sin(z)dz$$

$$= \tfrac{3}{2}\underbrace{\int\sin(z)\,dz}_{-\cos(z)}$$

$$= -\tfrac{3}{2}\cos(z) + c$$

d)

$$\int\frac{3}{3x+1}dx = \ln|3x+1| + c$$

Trick: e)

$$\int\frac{4}{2x+3}dx = \int\frac{2\cdot 2}{2x+3}dx$$

$$= 2\cdot\int\frac{2}{2x+3}dx$$

$$= 2\cdot\ \ln|2x+3| + c$$

Beispiel:

a)

$$\int\frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$$

① NS vom Nenner:

$x^2-3x+2=0$ | PQ

$x_1=1$ oder $x_2=2$

zwei einfache NS (vgl. Tabelle)

② Partialbruchzerlegung:

Partialbruch zur NS x=1

Partialbruch für NS x=2

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{2x+1}{\underbrace{(x-1)\cdot(x-2)}_{\text{Linearfaktorzerlegung}}} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

| Hauptnenner gemäß Linearfaktorzerlegung bilden

$$\frac{2x+1}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{A\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)} + \frac{B\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)}$$

| nur noch Zähler betrachten

$$\boxed{2x+1 = A\cdot(x-2) + B\cdot(x-1)}$$

NS für x einsetzen:

$x_1=1$:

$$2\cdot 1+1 = A\cdot(1-2) + \cancel{B\cdot(\underbrace{1-1}_{0})}$$

$$3 = A\cdot(-1)$$

$$-3 = A$$

$x_2=2$:

$$2\cdot 2+1 = \cancel{A\cdot(\underbrace{2-2}_{0})} + B\cdot(2-1)$$

$$5 = B$$

$$\Rightarrow \text{Damit: } \int\frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int\frac{-3}{x-1}dx + \int\frac{5}{x-2}dx$$

$$= -3\cdot\int\frac{1}{x-1}dx + 5\cdot\int\frac{1}{x-2}dx$$

$$= -3\cdot\ln|x-1| + 5\cdot\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{6x+10}{x^2+2x-3}\,dx$$

① Nullstellen: $x^2+2x-3=0$ | PQ

$x_1=1$ oder $x_2=-3$

② $$\frac{6x+10}{(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)} + \frac{B\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x-1)}$$

$$6x+10 = A\cdot(x+3) + B\cdot(x-1)$$

setze ein $x_1=1$: $6\cdot1+10 = A\cdot(1+3) + \cancel{B\cdot(1-1)}$

$16 = 4A$

$\underline{\underline{4=A}}$

$x_2=-3$: $6\cdot(-3)+10 = \cancel{A\cdot(\underbrace{-3+3}_{0})} + B\cdot(-3-1)$

$-8 = -4B$

$\underline{\underline{2=B}}$

Damit $$\int \frac{6x+10}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{4}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+3}\,dx$$

$$\underline{\underline{= 4\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C}}$$