



Mathematik Vorbereitungskurs
Summen

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie

1.) $\sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$

2.) $\sum_{i=2}^7 (2-i) = (2-2) + (2-3) + (2-4) + (2-5) + (2-6) + (2-7) = 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 = -15$

3.) $\sum_{i=0}^4 (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

b) Schreiben Sie als Summe

1.) $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 30 = \sum_{i=0}^{10} 3i$

2.) $(-1) + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = \sum_{i=1}^8 (-1)^i i$
 $i=1$ wechselt Vorzeichen: gerade $i \Rightarrow 1$, ungerade $i \Rightarrow -1$

3.) $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 20^2 = \sum_{i=0}^{20} i^2$

c) Ermitteln Sie die Grenzen der Laufvariablen

1.) $\sum_{i=3}^{10} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10}$

2.) $\sum_{i=0}^{12} \frac{2^i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4.096}{3}$

3.) $\sum_{i=3}^{18} (-1)^i i^2 = (-9) + 16 - 25 + \dots + 324$
 $(-1)^{18} \cdot 18^2$

d) Führen Sie eine Indexverschiebung durch

1.) $\sum_{i=6}^{10} (i-1) = \sum_{i=1}^? ?$
 -5

2.) $\sum_{i=4}^{10} (i+4) = \sum_{i=?}^8 ?$

3.) $\sum_{i=3}^{15} (2i+3) = \sum_{i=1}^? ?$

4.) $\sum_{i=4}^{10} (i^2-2) = \sum_{i=1}^? ?$

Merke: Verschiebt man den Index um den Wert k nach links (rechts), muss man den Index überall durch $(i+k)$ (bzw. $(i-k)$) ersetzen.

Quellen: <http://www.juergenmeisel.de/oa/uebungen/uebungen/Summenzeichen.pdf>

1.) $\sum_{i+5=6}^{i+5=10} ((i+5)-1) = \sum_{i=1}^5 (i+4)$

Aufgabe 2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt:

$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

(für alle $n \geq 1$)

Quelle: <https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf>

① Induktionsanfang:

Für $n=1$: $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \checkmark$

② Zu zeigen:

$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$

$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2 \cdot (n+1) - 1$

Induktionsvoraussetzung

$= n^2 + 2 \cdot (n+1) - 1$

$= n^2 + 2n + 2 - 1$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2 \quad \square \text{ abg.e.d.}$