



Summen und Reihen

1.1 Gauß'sche Summenformel

Wie Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{i=1}^{10} i

Ende (oben), Startwert (unten), Laufvariable (links), a_i = i (rechts)

Wie lautet die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen?

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie

1.) \sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225

2.) \sum_{i=2}^7 (2-i) = (2-2) + (2-3) + (2-4) + (2-5) + (2-6) + (2-7) = 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 = -15

3.) \sum_{i=0}^4 (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55

b) Schreiben Sie als Summe

1.) 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 30 = \sum_{i=0}^{10} 3i

2.) (-1) + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = \sum_{i=1}^8 (-1)^i i

3.) 0^2 + 1^2 + 4^2 + 9^2 + 16^2 + 25^2 + ... + 400 = \sum_{i=0}^{20} i^2

c) Ermitteln Sie die Grenzen der Laufvariablen

1.) \sum_{i=3}^{10} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{10}

2.) \sum_{i=0}^{12} \frac{2^i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + ... + \frac{4096}{3}

3.) \sum_{i=3}^{18} (-1)^i \cdot i^2 = (-9) + 16 - 25 + ... + 324

d) Führen Sie eine Indexverschiebung durch

1.) \sum_{i=6}^{10} (i-1) = \sum_{i=1}^? ?

2.) \sum_{i=4}^{10} (i+4) = \sum_{i=?}^8 ?

3.) \sum_{i=3}^{15} (2i+3) = \sum_{i=1}^? ?

4.) \sum_{i=4}^{10} (i^2-2) = \sum_{i=1}^? ?

Quellen: <http://www.juergenmeisel.de/oaiuebung/uebung/Summenzeichen.pdf>

Aufgabe 2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt:

\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 (für alle n \ge 1)

Quelle: <https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf>

① Induktionsanfang:
Für n=1: \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \checkmark

② Zu zeigen: \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2

\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2 \cdot (n+1) - 1

= n^2 + 2 \cdot (n+1) - 1

= n^2 + 2n + 2 - 1

= n^2 + 2n + 1

= (n+1)^2 \quad \square \text{ abg.e.d. }

Merke: Verschiebt man den Index um den Wert k nach links (rechts), muss man den Index überall durch (i+k) (bzw. (i-k)) ersetzen:

1.) \sum_{i=5}^{10} ((i+5)-1)

= \sum_{i=1}^5 (i+4)

= \sum_{i=1}^5 (i+4) = 5 + 6 + 7 + 8 + 9

gleich

\sum_{i=6}^{10} (i-1) = 5 + 6 + 7 + 8 + 9