11 Komplexe Zahlen

11.1 Kartesische Darstellung

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen. Definiert man die Zahl i mit $i^2 = -1$ (bzw. $i = \sqrt{-1}$), lassen sich alle Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen. Es ist die kleinste Zahlenmenge, in der alle reellen Zahlen und alle Wurzeln aus negativen Zahlen enthalten sind.

$i \cdot i = i^2 = -1$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$ Aus komplexer Sicht

Die Indizes, das jeweils Präzisen positiven zwischen Teil des komplexen Zahlen z Lösungen (oft auch oder komplexe komplexe Lösungen) Gleichungen, aus die reelle Zahlen nicht gibt. Diese Eigenschaft ist die Grund der Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 1
Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$.

$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$
$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
Achtung: komplexe!

Komplexe Zahlen lassen sich graphisch darstellen. Die als Pfeile (Vektor) in der sog. Gaußschen Zahlenebene.

Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl

$z = a + b \cdot i$

Dazu

$z_1 = 3 + i$
$z_2 = -1 + 2i$
$z_3 = -2 - 3i$
$z_4 = 4 - i$

$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (1 + 2)i$
$= 4 + 3i$

Gaußsche Zahlenebene

Anschaulichkeit der Länge (Pfeile)

12

Addition
$z_1 + z_2$

Geometrische Anschauung

Multiplikation mit einem Skalar
$2 \cdot z_1 = 2 \cdot (3 + i)$
$= 6 + 2i$

Multiplikation eines komplexen Zahlen mit einem Zahlen
$z_1 \cdot z_2 = (3 + i) \cdot (-1 + 2i)$
$= -3 + 6i - i + 2i^2$
$= -5 + 5i$

Konjugiert komplexe Zahl
$\overline{z_1} = \overline{3 + i}$
$= 3 - i$
Spiegelung an der Achse

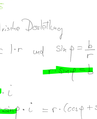
Betrag (Länge) einer komplexen Zahl
$|z_1| = \sqrt{3^2 + 1^2}$
$= \sqrt{10}$
Satz des Pythagoras

Ab hier

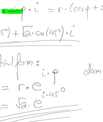
$z_1 \cdot \overline{z_1}$
$= (3 + i) \cdot (3 - i)$
$= 9 - 3i + 3i - i^2$
$= 9 + 1$
$= 10$
Reell!

Wichtig

Long and smaller (Non-Aspectacular)



Simply longer and smaller



Simply longer and smaller

13

11.2 Trigonometrische Darstellung

Es liegt fest sich sich einleitung über dessen Länge r und ein Winkel φ. Aus dieser mit der r Achse einschließt, beschreiben. Dies sind die sogenannten Polarkoordinaten (r, φ).

14

$z = a + b \cdot i$

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in ~~Trigonometrischer und~~ Exponentialform dar:

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 - i), \qquad z_2 = -10, \qquad z_3 = (1 + i)^9.$$

Rep: $z = a + b \cdot i$

Radius: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Winkel: $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right) = 45°$
$\sin^{-1}\left(\frac{b}{|z|}\right) = 45°$

Dann in Trigonometrische Darstellung

Ergibt: $\cos\varphi = \frac{a}{r} \mid \cdot r$ und $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ (Gegenkathete / Hypotenuse)

$r \cdot \cos\varphi = a$

Also $z = a + b \cdot i$
$z = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i)$

hier: $z = \sqrt{2} \cdot \cos(45°) + \sqrt{2} \cdot \sin(45°) \cdot i$

Wichtig für Prüfung: Exponentialform: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ hier $z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°}$

damit einfacher:

- Multiplikation:
Bsp: $z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot 45°}$
$z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot 30°}$

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 45°} \cdot 3 \cdot e^{i \cdot 30°}$
$= (2 \cdot 3) \cdot e^{i \cdot 75°}$
6

$x^2 \cdot x^5 = x^7$
vgl.

$(x^2)^3 = x^6$

größte Vorteil

- Potenzieren:
$z = 1 + i$ gesucht $(1 + i)^7$
$\Downarrow$ in Exponentialform
$(\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°})^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot (e^{i \cdot 45°})^7$
$= (\sqrt{2})^7 \cdot e^{i \cdot 7 \cdot 45°}$
$= (\sqrt{2})^7 \cdot e^{i \cdot 315°}$

15

12 Vektorrechnung

12.1 Grundlagen

Definition 12.1: Vektor
Ein Vektor ist ein Pfeil, der eine Richtung und eine Länge hat. Vektoren lassen durch Pfeile (kurzerhalb) werden. Jeder Punkt im Raum kann durch einen Ortsvektor beschrieben werden, der vom Ursprung (Nullpunkt) ausgeht und auf einen Punkt im Raum zeigt. Der Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit denen des Punktes überein.
Beispiel: $A(1|1)$ und $B(4|1)$

Anwendung: Kräfte

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren können sich gleich sein und haben den Ursprung

Zeile stehen für einen der Koordinate

Definition 12.2: Addition von Vektoren
Die Addition zweier Vektoren
Vorgehen Kreiselgesetzgesetzes in der Physik! Das Ende eines Vektors wird an den Anfang des zweiten Vektors dazuaddiert.

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

16

12 Vektorrechnung

Definition 12.3: Multiplikation mit einem Skalar (reeller Zahl)
Beim ein Verlängerung der Länge bei. Die Richtung, wird, wenn ich eine negative Zahl multipliziere.

$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$

Das erhält den sogenannten Gegenvektor durch Multiplikation mit -1.

$\vec{a} \nearrow$
$-\vec{a} \swarrow$

Merke: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = r \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$
Prüfung: Zeilenweiß Verhältnisse

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

17

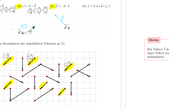
12 Vektorrechnung

12.2 Übungen

Aufgabe 1
Ergänzen und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie jeweils den neuen Vektor (bzw. den Ortsvektor) für das jeweils durch eine Zeichnung!

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} + \vec{c} =$ $\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

Aufgabe 2
Ordnen Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren zu [1].



18

12 Vektorrechnung

12.3 Betrag eines Vektors

Merke:
Ein Vektor $\vec{a}$ heißt normiert, wenn er den Betrag 1 hat, also wenn $|\vec{a}| = 1$. Ein beliebiger Vektor kann normiert werden, indem man ihn mit dem Kehrwert seines Betrages multipliziert.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ Dann $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dann ist $\vec{a}_0 =$

19

12.2.2 Geraden in zwei bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem

Gerade durch die Punkte $A(1|1)$ und $B(4|1)$

Wichtig: Richtungsvektor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel

Übung:
1. Stellen Sie eine Gerade $\vec{a}$ auf, die durch die Punkte $A(2|1)$ und $B(5|1)$ – G verlaufen
2. Stellen Sie eine Gerade $\vec{b}$ auf, die durch A und $B(5|1)$ – G verlaufen
3. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und h.

① $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = 1$ Gerade parallel zur x-Achse

② Analog:
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ "Stützvektor" "Richtung"
$1 + 2 \cdot s = 5 - 2s$
$2 - s = 2 - s$
LGS
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
$2 + 3 \cdot r = 5$
$1 = 1$
$\Rightarrow r = \frac{5 - 2}{3} = 1$
$s = 0$
$\Rightarrow$ der gesuchte Punkt
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
S(5|1)

12.2.4 Lagebeziehungen

Durch den Vertrag von der Analytic bekannte, neuerdings kamen die Ortsvektoren ergibt Geraden im Raum. Dieses ergibt Zwei verschiedene Lösungen Schon dass Zwei unterschiedlichen Lagen der Geraden.

Lage von Geraden

Bestimmung: Im ersten ergibt sich ein unterbestimmtes LGS, so dass die zwei(nicht) Schritten nach der Richtungsvektoren (RV) betrachtet werden müssen.

Vorgr	Lösung des LGS	RV vorl
schneiden sich	eindeutige Lösung	Ausn. Vielfach
parallel	Ausn. Lösung	nicht parallel
windschief	Ausn.	nicht parallel
~~windschief~~	unendlich viele	Vielfach

Lage Geraden/Ebenen

Man sagt sich ein unterbestimmtes LGS, so dass die Lösung nach Anwendung des Lösch Verfahrens eine Zeile mit lauter Nullen ergibt, so kann ...

Beziehung für die Schnittpunkt der Gerade:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
und die Ebenen
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Gerade
Richtungsvektoren Spannen

Vorgr	Lösung des LGS
schneiden sich	eindeutige Lösung
parallel	Ausn. Lösung
windschief (gleich)	unendlich viele

$E = g$
LGS

12 Vektorrechnung

12.4 Skalarprodukt, Vektorprodukt

Nur: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$= |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \cdot |\vec{b}|$
Skalar
$|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$
$|\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

Definition 12.5: Skalarprodukt
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel φ miteinbeziehen, liefert als Ergebnis ein Skalar (reelle Zahl):

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Merke: $\{\vec{a}, \vec{b}\} \neq 0$
In der Praxis vorrangig benutzt man eh Algebraische Berechnung, über die Koordinaten der Vektoren:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Beispiel:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2$
$= 6 + 2$
$= 8$

20

12 Vektorrechnung

Merke:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
- hat das Ergebnis 0, dann stehen die Vektoren senkrecht zueinander
- liefert die analytische Perpektive von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ falls $\vec{a}$ ein Lange 1 hat.

Formt man die Definition des Skalarprodukt nach $\cos\varphi$ um, lässt sich damit der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen.

Definition 12.6: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)
Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liefert als Ergebnis einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Die Richtung des Vektors $\vec{c}$ ergibt sich nach Rechte Hand Regel. Die Länge dieses Vektors entspricht der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Beispiel:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Merkhilfe

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{pmatrix}$

Es kann geometrisch Anwendung in der Physik, Geometrie, Technik.

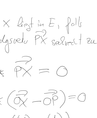
21

Rechen $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 = 8$ ✓
$= 8 + 0$
$= 8$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 = 8$ ✓
$= 8 + 0$
$= 8$

In Geometrie lässt sich eine Ebene nun auch darstellen:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Gerade
2 Richtungsvektoren Spannen



② $\vec{n}$ senkrecht $= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

Ein Punkt X liegt in E, falls der Verbindungsvektor $\vec{PX}$ senkrecht zu $\vec{n}$ ist:

$\vec{n} * \vec{PX} = 0$

$\vec{n} * (\vec{OX} - \vec{OP}) = 0$

$E: \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0$ (Normalenform)

$4x - y - 3z - (4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 3) = 0$
$= 0$
$4x - y - 3z - (-7)$

$\boxed{E: 4x - y - 3z = -7}$ (Koordinatenform)

Normalenform