

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

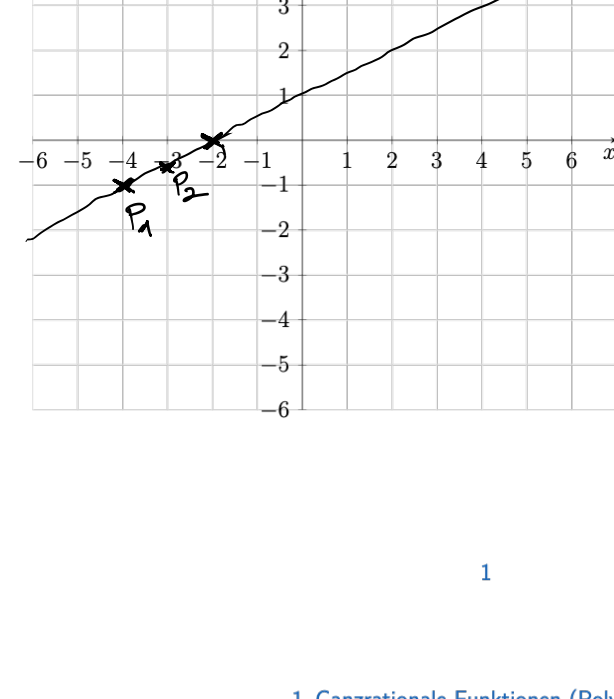
1.1 Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade. Es folgt eine Analyse einer linearen Funktion an einem Beispiel, mit der Ziel, anhand bestimmter charakteristischer Eigenschaften den Graph zu skizzieren.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	f(x)	Punkte
-4	$f(-4) = \frac{1}{2}(-4) + 1 = -2 + 1 = -1$	$P(-4 -1)$
-3	$f(-3) = \frac{1}{2}(-3) + 1 = -1.5 + 1 = -0.5$	$P(-3 -0.5)$
-2	$f(-2) = \frac{1}{2}(-2) + 1 = -1 + 1 = 0$	$P(-2 0)$
-1	$f(-1) = \frac{1}{2}(-1) + 1 = -0.5 + 1 = 0.5$	$P(-1 0.5)$
0	$f(0) = \frac{1}{2}(0) + 1 = 1$	$P(0 1)$
1	$f(1) = \frac{1}{2}(1) + 1 = 1.5$	$P(1 1.5)$
2	$f(2) = \frac{1}{2}(2) + 1 = 2$	$P(2 2)$

Die Menge aller Punkte lässt sich als Graph in einem Koordinatensystem darstellen:



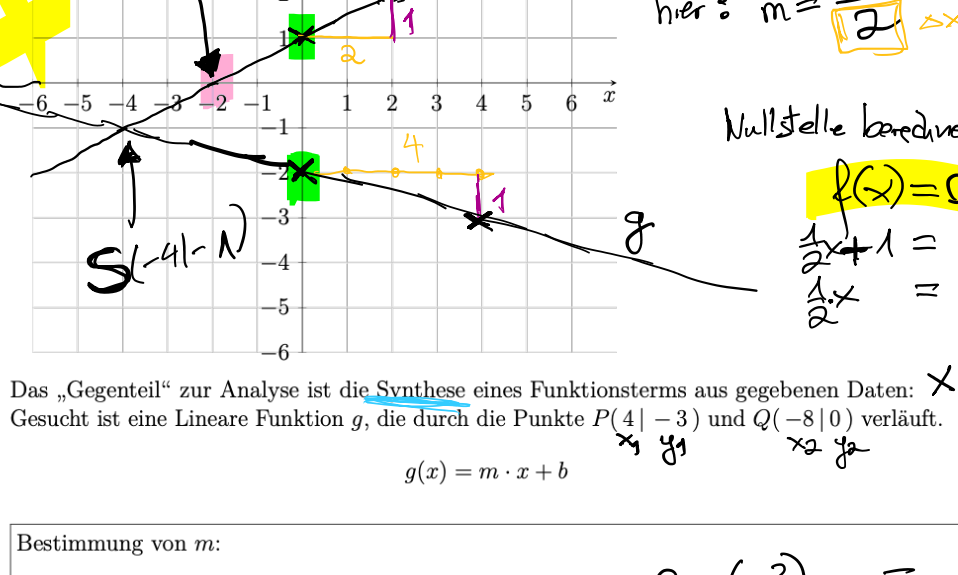
1

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Definition 1.1: Funktion

Eine Funktion ordnet jedem x aus dem Definitionsbereich (die Zahlen, die man für x einsetzen darf) eindeutig ein Funktionswert $f(x)$ (die y -Koordinate) aus dem Wertebereich (Menge aller Funktionswerte) zu.

Der Graph einer linearen Funktion kann man auch direkt mittels der im Funktionsterm vorhandenen Koeffizienten skizzieren:



Das „Gesamt“ zur Analyse ist die Synthese eines Funktionsterms aus gegebenen Daten: Gegeben sei eine lineare Funktion g , die durch die Punkte $P(4 | -3)$ und $Q(-3 | 0)$ verläuft.

$$g(x) = m \cdot x + b$$

Bestimmung von m :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-3)}{-3 - 4} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

2

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Bestimmung von b :

$$g(x) = -\frac{3}{7}x + b \quad \text{ein bekanntes Punkt einsetzen}$$

$$-3 = -\frac{3}{7} \cdot 4 + b$$

$$-3 = -1.14 + b$$

$$-3 = -1 + b + 1$$

$$-2 = b$$

Somit ist $g(x) = -\frac{3}{7}x - 2$

1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{3}{7}x - 2 \quad | +\frac{3}{7}x \quad | -1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{7}x = -3 - 1$$

$$\frac{13}{14}x = -4 \quad | \cdot \frac{14}{13}$$

$$x = -\frac{56}{13} \approx -4.31$$

1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist immer eine Parabel.

Beispiel 1: Analyse von $f(x) = x^2 + 4x + 4$

Die Erstellung einer qualitativen Skizze des Graphen von f ist nicht möglich. Daher werden im Folgenden die sog. Nullstellen der Funktion f berechnet. Die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist eines der wichtigsten Schritte für die Analyse und wird an vielen Stellen in der Analysis benötigt!

Definition 2.1: Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnittpunkte oder Berührungspunkte des Graphen von f mit der x -Achse. Hier gilt $f(x) = 0$.

Nullstellen: Ansatz: $f(x) = 0$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Scheitelpunkt: $S(-1 | 1)$

Definition 2.2: PQ-Formel

Hat die quadratische Gleichung die Form $ax^2 + bx + c = 0$, dann ergeben sich die Nullstellen mittels PQ-Formel zu:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Sind die Nullstellen einer quadratischen Funktion bekannt, kann man direkt den Scheitelpunkt S der Parabel angeben:

Beispiel 2: Analyse von $f(x) = x^2 - 4x$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^2 - 4x = 0 \quad | :x$$

$$x - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x = 4$$

Scheitelpunkt: $S(2 | -4)$

1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades

Der Grad eines Polynoms ist durch die höchste im Funktionsterm vorkommende Potenz festgelegt. Lösen von Aufgabe 1 des ersten Übungsblatts:

$$f(x) = x^2 - 16$$

Nullstellen:

$$x^2 - 16 = 0 \quad | :x$$

$$x - 16 = 0 \quad | +16$$

$$x = 16$$

Scheitelpunkt: $S(0 | -16)$

4

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Nullstellen:

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

Skizze:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad | :x$$

$$x + 3 - \frac{4}{x} = 0$$

Scheitelpunkt: $S(-1.5 | -6.25)$

Handverhalten: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

5

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Nullstellen:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Skizze:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad | :x$$

$$x - 4 + \frac{4}{x} = 0$$

Scheitelpunkt: $S(2 | 0)$

Handverhalten: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

6

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Nullstellen:

$$f(x) = x^2 - 7x + 12$$

Skizze:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad | :x$$

$$x - 7 + \frac{12}{x} = 0$$

Scheitelpunkt: $S(3.5 | -2.25)$

Handverhalten: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!

Merkmale: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verhalten sich an den Rändern immer gegen Unendlich!