3 Folgen und Grenzwerte

3.1 Folgen: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n}$ ← nicht Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$!

Eine Folge kann als eine Funktion aufgefasst werden, dessen Definitionsbereich die natürlichen Zahlen ist.

Folge: Die Menge $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist meist eine unbegrenzte Grundmenge, aber die mit Ausnahme einer endlichen Menge alle Elemente gleich sind (= konstante Folge)?
Determinante

$\det A = 0$

Theorem

Definition 1.1: Grenzwert einer Zahlenfolge

g ist Grenzwert einer Folge f_n, wenn es in jeder noch so kleinen Umgebung von g nur noch endlich viele Elemente der Folge gibt. Es gibt also für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein n_0 so, dass alle Elemente $f(n)$ dieser Folge, für die $n \geq n_0$ gilt, in dieser ε-Umgebung von g liegen.

Grenzwert

Merke:
Die Folge hat den unendlichen Bereich Ziel. Ziel ist, dass die Folge ab einem bestimmten Punkt n_0 nur noch ε ist.

Die Theorie der Grenzwerte ermöglicht Folgen an eine mögliche Grenzfolge g zu nähern und damit Verwendung bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen, die Differenzen

der Ableitung (auf Grenzwert einer Folge von Differenzquotienten) und beim Riemann-Integral(grenzwert).

In der Praxis wendet man die Berechnung von Grenzwerten oft ohne Definition an, sondern nutzt lediglich die aufgezeigten Grenzwerten, um erhält den Eigenschaften ableiten.

Wenn $\lim_{n\to\infty} \text{und} \lim_{n\to\infty}$ beide konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} = a$ und $\lim_{n\to\infty} b$, a und und b reelle Zahlen sind, dann gilt:

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ $\quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$ $\quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

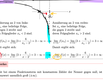
Funktionswerte der Folge können (mitunter) vor Annäherung an Grenzwert sehr stark schwanken (siehe Beispiel).

Beispiel:

3.2 Grenzwerte von Funktionen

Die Prüfung der Umgebung bei der Grenzwertbestimmung von Zahlenfolgen kann sehr gewaltsam und mit Fallunterscheidungen (wie) an ein ans ewige Ende hoch und kann bei Berechnung für sich ist Grenzwert unendlich.

Die Zusammenhänge mit Folgen ist auch deshalb sparlich, dass man sich bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen, die Differenzen und Ableitungen, nicht mehr um Folgen kümmern muss. Stattdessen kann es die Mitte dieses Zahlenbereiches x_0 so verschieben $f(x)$ die Mitte der Folge $f(x_0)$ ist man sich ab Zahlenfolge auf der g-Achse verschieben kann.

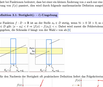


Definition 2.1: Grenzwert einer Funktion

g ist Grenzwert einer Funktion $f(x)$, wenn es in jeder noch so kleinen Umgebung von g nur noch endlich viele Elemente der Funktion gibt. Es gibt also für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein x_0 so, dass alle Elemente $f(x)$, für die $x \geq x_0$ gilt, dann in dieser ε-Umgebung von g liegen.

Es gibt die Definition eines Grenzwertes einer Funktion auch die Definition von Grenzwerten von Zahlenfolgen ausführlich dann, wenn man sich die Mühe macht, Zahlenfolgen und Funktionen miteinander. Dann erkennt man die Funktionswerte von Funktionen $f(x)$ als Folgenelemente $f(n)$ und Folgenelemente $f(n)$ als Funktionswerte $f(x)$ und kann dann verwenden, in dem Fall kann man diese Grenzwerte g ist unendlich $f(x)$ die Mitte der Folge $f(x_0)$ ist man sich ab Zahlenfolge auf der g-Achse verschieben kann.

Beispiel:



Durch geschickte Umformungen (siehe durch die Anwendung der Regel von de L'Hospital in Kapitel 4.2.2) kann man diese vermeiden, in diesem Falle einen unendlichen Grenzwert zu berechnen.

Beispiel:

Beispiel Untersuchung der Verhalten der Funktionswerte an der Definitionslücke $x_0 = 2$

Annäherung an 2 von rechts:
$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$
(Nenner wird immer kleiner, aber immer Bruchzahl > 1 und positiv)

Annäherung an 2 von links:
$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$
(Nenner wird immer kleiner, aber immer Bruchzahl < 1 und negativ)

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ ← Grenzwert gegen unendlich

Zweite Ableitung

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ ← Grenzwert gegen unendlich

Zweite Ableitung

Merke:
Gibt bei einer Funktionswert mit konstanten Zähler der Nenner gegen null, ist der Grenzwert unendlich groß ∞.

3.3 Stetigkeit

Stetigkeit von Funktionen bedeutet, dass bei einer im kleinen Änderung von x auch nur eine kleine Änderung von $f(x)$ passiert, dies wird durch folgende mathematische Definition ausgedrückt.

Definition 3.1: Stetigkeit – ε-Umgebung

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Es gibt also zu jeder noch so kleinen ε-Umgebung um den Funktionswert $f(x_0)$ eine δ-Umgebung um x_0, in der alle Funktionswerte $f(x)$ liegen.

Theorem

Eine Fn. ist Nachweis der Stetigkeit ist praktischer Definition Infolge der Folgeelemente $f(x_n)$

Definition 3.2: Stetigkeit – Folgenkriterium

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn **für alle Folgen** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Bedingung $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ erfüllt ist. Es gibt also zu jeder Folge, die gegen x_0 konvergiert, eine Folge, deren Funktionswerte gegen den Funktionswert $f(x_0)$ konvergieren.

Wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist, dann ist $f(x)$ in der Umgebung $U(x_0)$ stetig.

Merke:
Die Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn $f(x_0)$ existiert.
Es **muss** **und hinreichend** **Grenzwert** existieren, und beide müssen gleich sein.
Es muss **mindestens** **eine** Folgenelement x_n existieren.

Stetigkeit

Beweis

Ausdrucksfähigkeit Bezug zum Grenzwert

Beispiel 1

Anschaulich Bezug zum Grenzwert

Nachteil ist dass man den Grenzwert einer Funktion ohne den Stift abzusetzen zeichnen kann, dies ist bei einer Funktion mit Sprungstellen nicht möglich. Dies kann man aber nur bei einer reelle Funktion Sprungstellen Grenzwert und stetig, dass man gleichzeitiger Grenzwert und stetig.

Beispiel

Nachteil ist die Differenzquotient existiert nicht, wenn die Funktion stetig ist, dann Grenzwertbeweis gerade auf Beispiel an der Stelle $x_0 = 0$.

Merke:
Die Funktion ist an der Stelle x_0 differenzierbar $f'(x_0)$ existiert.
Es **muss** **und hinreichende** **Grenzwert** existieren, und beide müssen gleich sein.
Es muss **mindestens** **eine** Folgenelement x_n existieren.

Beispiel 2

Anschaulich Bezug zum Grenzwert

Nachteil ist dass man den Grenzwert einer Funktion ohne den Stift abzusetzen zeichnen kann, dies ist bei einer Funktion mit Sprungstellen nicht möglich. Dies kann man aber nur bei einer reelle Funktion Sprungstellen Grenzwert und stetig, dass man gleichzeitiger Grenzwert und stetig.

Beispiel

Der Zwischenwertsatz besagt, dass **Grenzwert der stetigen Funktion Cauchy**

Definition 3.4: Zwischenwertsatz

Der Zwischenwertsatz sagt aus, dass eine reelle Funktion f in der einen eingeschlossenen Bereich $[a, b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.
Der Zwischenwertsatz ist eine Aussage über die Eigenschaften von stetigen Funktionen. Er besagt, dass eine stetige Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ alle Zwischenwerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

Folie 2 und y stetige Funktionen und, dass und auch stetig.

$f \in C \quad f \in C \quad f \in C \qquad f \in C$

Daher sind auch die Polynome auch alle stetigen Funktion stetig. Auf die Grenzwertsatzes Stetigkeit Grenzwert und Ableitung Grenzwert und Differenzquotient. Auf jeder Polynom ungestetige Funktion (ausgenommen sind reelle Funktion) besitzt.

Definition 3.5: Satz von Maximum/Minimum

Es existieren zwei Werte x_1, x_2 in $[a, b]$ so dass $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Der Maximum/Minimum eines stetigen Funktion wird also in stetigenden einen Funktion Die Differenzquotient.

Auch bekannt als Satz von Weierstraß, Extremwertsatz, Minimum, Maximum.

4 Differentialrechnung Teil 1

4.1 Differenzenquotient

Ziel ist die Bestimmung der Ableitung.
Beispiel:
Gerade Funktion

Steigung der Gerade gesucht?
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

In Allgemeinen ist die Steigung in jeden Punkt verschieden?

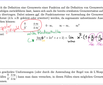
Die Steigung in einem Punkt ist relativ, hat keine Bedeutung, weil man Punkt nicht sehen kann.
Der sogenannte Tangentenschaft gibt auf den Kurvenpunkt Gerade Kurve **berührt** (Gleich der Gerade).

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Merke:
Die Tangente an eine Gerade, die durch den Punkt verläuft und nicht in der Umgebung des Punktes hoteingeht anderlangt.
Die Steigung dieser Tangente nimmt man die Steigung im Punkt?

Wie gelingt man an diese Tangente?

Beispiel $f(x) = x^2$ (Normalparabel)
Berechnung der Steigung
in Punkt $P_1(-3|9)$
Wie kann man die Steigung in der einen einzelnen Punkt zeitnah kann man?



Die Steigung der gesamten Sekante ist relativ, relativ zum ihre Punkt Q nimmt Steigung m_{PQ} an.

Sekante Sekante

Tangente

Sekante

Sekante

Sekante

Sekante

Wenn die einen Abstand $P(x)$ kann man jetzt näher die Steigungen P_1 Steigung Punkte P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12} P_{13} P_{14} P_{15} P_{16} P_{17} P_{18} P_{19} P_{20} P_{21} P_{22} P_{23} P_{24} P_{25} P_{26} P_{27} P_{28} P_{29} P_{30} P_{31} P_{32} P_{33} P_{34} P_{35} P_{36} P_{37} P_{38} P_{39} P_{40} P_{41} P_{42} P_{43} P_{44} P_{45} P_{46} P_{47} P_{48} P_{49} P_{50} P_{51} P_{52} P_{53} P_{54} P_{55} P_{56} P_{57} P_{58} P_{59} P_{60} P_{61} P_{62} P_{63} P_{64} P_{65} P_{66} P_{67} P_{68} P_{69} P_{70} P_{71} P_{72} P_{73} P_{74} P_{75} P_{76} P_{77} P_{78} P_{79} P_{80} P_{81} P_{82} P_{83} P_{84} P_{85} P_{86} P_{87} P_{88} P_{89} P_{90} P_{91} P_{92} P_{93} P_{94} P_{95} P_{96} P_{97} P_{98} P_{99} P_{100} P_{101} P_{102} P_{103} P_{104} P_{105} P_{106} P_{107} P_{108} P_{109} P_{110} P_{111} P_{112} P_{113} P_{114} P_{115} P_{116} P_{117} P_{118} P_{119} P_{120} P_{121} P_{122} P_{123} P_{124} P_{125} P_{126} P_{127} P_{128} P_{129} P_{130} P_{131} P_{132} P_{133} P_{134} P_{135} P_{136} P_{137} P_{138} P_{139} P_{140} P_{141} P_{142} P_{143} P_{144} P_{145} P_{146} P_{147} P_{148} P_{149} P_{150} P_{151} P_{152} P_{153} P_{154} P_{155} P_{156} P_{157} P_{158} P_{159} P_{160} P_{161} P_{162} P_{163} P_{164} P_{165} P_{166} P_{167} P_{168} P_{169} P_{170} P_{171} P_{172} P_{173} P_{174} P_{175} P_{176} P_{177} P_{178} P_{179} P_{180} P_{181} P_{182} P_{183} P_{184} P_{185} P_{186} P_{187} P_{188} P_{189} P_{190} P_{191} P_{192} P_{193} P_{194} P_{195} P_{196} P_{197} P_{198} P_{199} P_{200} P_{201} P_{202} P_{203} P_{204} P_{205} P_{206} P_{207} P_{208} P_{209} P_{210} P_{211} P_{212} P_{213} P_{214} P_{215} P_{216} P_{217} P_{218} P_{219} P_{220} P_{221} P_{222} P_{223} P_{224} P_{225} P_{226} P_{227} P_{228} P_{229} P_{230} P_{231} P_{232} P_{233} P_{234} P_{235} P_{236} P_{237} P_{238} P_{239} P_{240} P_{241} P_{242} P_{243} P_{244} P_{245} P_{246} P_{247} P_{248} P_{249} P_{250} P_{251} P_{252} P_{253} P_{254} P_{255} P_{256} P_{257} P_{258} P_{259} P_{260} P_{261} P_{262} P_{263} P_{264} P_{265} P_{266} P_{267} P_{268} P_{269} P_{270} P_{271} P_{272} P_{273} P_{274} P_{275} P_{276} P_{277} P_{278} P_{279} P_{280} P_{281} P_{282} P_{283} P_{284} P_{285} P_{286} P_{287} P_{288} P_{289} P_{290} P_{291} P_{292} P_{293} P_{294} P_{295} P_{296} P_{297} P_{298} P_{299} P_{300} P_{301} P_{302} P_{303} P_{304} P_{305} P_{306} P_{307} P_{308} P_{309} P_{310} P_{311} P_{312} P_{313} P_{314} P_{315} P_{316} P_{317} P_{318} P_{319} P_{320} P_{321} P_{322} P_{323} P_{324} P_{325} P_{326} P_{327} P_{328} P_{329} P_{330} P_{331} P_{332} P_{333} P_{334} P_{335} P_{336} P_{337} P_{338} P_{339} P_{340} P_{341} P_{342} P_{343} P_{344} P_{345} P_{346} P_{347} P_{348} P_{349} P_{350} P_{351} P_{352} P_{353} P_{354} P_{355} P_{356} P_{357} P_{358} P_{359} P_{360} P_{361} P_{362} P_{363} P_{364} P_{365} P_{366} P_{367} P_{368} P_{369} P_{370} P_{371} P_{372} P_{373} P_{374} P_{375} P_{376} P_{377} P_{378} P_{379} P_{380} P_{381} P_{382} P_{383} P_{384} P_{385} P_{386} P_{387} P_{388} P_{389} P_{390} P_{391} P_{392} P_{393} P_{394} P_{395} P_{396} P_{397} P_{398} P_{399} P_{400} P_{401} P_{402} P_{403} P_{404} P_{405} P_{406} P_{407} P_{408} P_{409} P_{410} P_{411} P_{412} P_{413} P_{414} P_{415} P_{416} P_{417} P_{418} P_{419} P_{420} P_{421} P_{422} P_{423} P_{424} P_{425} P_{426} P_{427} P_{428} P_{429} P_{430} P_{431} P_{432} P_{433} P_{434} P_{435} P_{436} P_{437} P_{438} P_{439} P_{440} P_{441} P_{442} P_{443} P_{444} P_{445} P_{446} P_{447} P_{448} P_{449} P_{450} P_{451} P_{452} P_{453} P_{454} P_{455} P_{456} P_{457} P_{458} P_{459} P_{460} P_{461} P_{462} P_{463} P_{464} P_{465} P_{466} P_{467} P_{468} P_{469} P_{470} P_{471} P_{472} P_{473} P_{474} P_{475} P_{476} P_{477} P_{478} P_{479} P_{480} P_{481} P_{482} P_{483} P_{484} P_{485} P_{486} P_{487} P_{488} P_{489} P_{490} P_{491} P_{492} P_{493} P_{494} P_{495} P_{496} P_{497} P_{498} P_{499} P_{500} P_{501} P_{502} P_{503} P_{504} P_{505} P_{506} P_{507} P_{508} P_{509} P_{510} P_{511} P_{512} P_{513} P_{514} P_{515} P_{516} P_{517} P_{518} P_{519} P_{520} P_{521} P_{522} P_{523} P_{524} P_{525} P_{526} P_{527} P_{528} P_{529} P_{530} P_{531} P_{532} P_{533} P_{534} P_{535} P_{536} P_{537} P_{538} P_{539} P_{540} P_{541} P_{542} P_{543} P_{544} P_{545} P_{546} P_{547} P_{548} P_{549} P_{550} P_{551} P_{552} P_{553} P_{554} P_{555} P_{556} P_{557} P_{558} P_{559} P_{560} P_{561} P_{562} P_{563} P_{564} P_{565} P_{566} P_{567} P_{568} P_{569} P_{570} P_{571} P_{572} P_{573} P_{574} P_{575} P_{576} P_{577} P_{578} P_{579} P_{580} P_{581} P_{582} P_{583} P_{584} P_{585} P_{586} P_{587} P_{588} P_{589} P_{590} P_{591} P_{592} P_{593} P_{594} P_{595} P_{596} P_{597} P_{598} P_{599} P_{600} P_{601} P_{602} P_{603} P_{604} P_{605} P_{606} P_{607} P_{608} P_{609} P_{610} P_{611} P_{612} P_{613} P_{614} P_{615} P_{616} P_{617} P_{618} P_{619} P_{620} P_{621} P_{622} P_{623} P_{624} P_{625} P_{626} P_{627} P_{628} P_{629} P_{630} P_{631} P_{632} P_{633} P_{634} P_{635} P_{636} P_{637} P_{638} P_{639} P_{640} P_{641} P_{642} P_{643} P_{644} P_{645} P_{646} P_{647} P_{648} P_{649} P_{650} P_{651} P_{652} P_{653} P_{654} P_{655} P_{656} P_{657} P_{658} P_{659} P_{660} P_{661} P_{662} P_{663} P_{664} P_{665} P_{666} P_{667} P_{668} P_{669} P_{670} P_{671} P_{672} P_{673} P_{674} P_{675} P_{676} P_{677} P_{678} P_{679} P_{680} P_{681} P_{682} P_{683} P_{684} P_{685} P_{686} P_{687} P_{688} P_{689} P_{690} P_{691} P_{692} P_{693} P_{694} P_{695} P_{696} P_{697} P_{698} P_{699} P_{700} P_{701} P_{702} P_{703} P_{704} P_{705} P_{706} P_{707} P_{708} P_{709} P_{710} P_{711} P_{712} P_{713} P_{714} P_{715} P_{716} P_{717} P_{718} P_{719} P_{720} P_{721} P_{722} P_{723} P_{724} P_{725} P_{726} P_{727} P_{728} P_{729} P_{730} P_{731} P_{732} P_{733} P_{734} P_{735} P_{736} P_{737} P_{738} P_{739} P_{740} P_{741} P_{742} P_{743} P_{744} P_{745} P_{746} P_{747} P_{748} P_{749} P_{750} P_{751} P_{752} P_{753} P_{754} P_{755} P_{756} P_{757} P_{758} P_{759} P_{760} P_{761} P_{762} P_{763} P_{764} P_{765} P_{766} P_{767} P_{768} P_{769} P_{770} P_{771} P_{772} P_{773} P_{774} P_{775} P_{776} P_{777} P_{778} P_{779} P_{780} P_{781} P_{782} P_{783} P_{784} P_{785} P_{786} P_{787} P_{788} P_{789} P_{790} P_{791} P_{792} P_{793} P_{794} P_{795} P_{796} P_{797} P_{798} P_{799} P_{800} P_{801} P_{802} P_{803} P_{804} P_{805} P_{806} P_{807} P_{808} P_{809} P_{810} P_{811} P_{812} P_{813} P_{814} P_{815} P_{816} P_{817} P_{818} P_{819} P_{820} P_{821} P_{822} P_{823} P_{824} P_{825} P_{826} P_{827} P_{828} P_{829} P_{830} P_{831} P_{832} P_{833} P_{834} P_{835} P_{836} P_{837} P_{838} P_{839} P_{840} P_{841} P_{842} P_{843} P_{844} P_{845} P_{846} P_{847} P_{848} P_{849} P_{850} P_{851} P_{852} P_{853} P_{854} P_{855} P_{856} P_{857} P_{858} P_{859} P_{860} P_{861} P_{862} P_{863} P_{864} P_{865} P_{866} P_{867} P_{868} P_{869} P_{870} P_{871} P_{872} P_{873} P_{874} P_{875} P_{876} P_{877} P_{878} P_{879} P_{880} P_{881} P_{882} P_{883} P_{884} P_{885} P_{886} P_{887} P_{888} P_{889} P_{890} P_{891} P_{892} P_{893} P_{894} P_{895} P_{896} P_{897} P_{898} P_{899} P_{900} P_{901} P_{902} P_{903} P_{904} P_{905} P_{906} P_{907} P_{908} P_{909} P_{910} P_{911} P_{912} P_{913} P_{914} P_{915} P_{916} P_{917} P_{918} P_{919} P_{920} P_{921} P_{922} P_{923} P_{924} P_{925} P_{926} P_{927} P_{928} P_{929} P_{930} P_{931} P_{932} P_{933} P_{934} P_{935} P_{936} P_{937} P_{938} P_{939} P_{940} P_{941} P_{942} P_{943} P_{944} P_{945} P_{946} P_{947} P_{948} P_{949} P_{950} P_{951} P_{952} P_{953} P_{954} P_{955} P_{956} P_{957} P_{958} P_{959} P_{960} P_{961} P_{962} P_{963} P_{964} P_{965} P_{966} P_{967} P_{968} P_{969} P_{970} P_{971} P_{972} P_{973} P_{974} P_{975} P_{976} P_{977} P_{978} P_{979} P_{980} P_{981} P_{982} P_{983} P_{984} P_{985} P_{986} P_{987} P_{988} P_{989} P_{990} P_{991} P_{992} P_{993} P_{994} P_{995} P_{996} P_{997} P_{998} P_{999} P_{1000}

Die Ableitung bei Grenzwerten (siehe oben) ist eine Grenzwertbestimmung von Sekanten Steigungen m_{PQ} Steigung Punkte P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12} P_{13} P_{14} P_{15} P_{16} P_{17} P_{18} P_{19} P_{20} P_{21} P_{22} P_{23} P_{24} P_{25} P_{26} P_{27} P_{28} P_{29} P_{30} P_{31} P_{32} P_{33} P_{34} P_{35} P_{36} P_{37} P_{38} P_{39} P_{40} P_{41} P_{42} P_{43} P_{44} P_{45} P_{46} P_{47} P_{48} P_{49} P_{50} P_{51} P_{52} P_{53} P_{54} P_{55} P_{56} P_{57} P_{58} P_{59} P_{60} P_{61} P_{62} P_{63} P_{64} P_{65} P_{66} P_{67} P_{68} P_{69} P_{70} P_{71} P_{72} P_{73} P_{74} P_{75} P_{76} P_{77} P_{78} P_{79} P_{80} P_{81} P_{82} P_{83} P_{84} P_{85} P_{86} P_{87} P_{88} P_{89} P_{90} P_{91} P_{92} P_{93} P_{94} P_{95} P_{96} P_{97} P_{98} P_{99} P_{100} P_{101} P_{102} P_{103} P_{104} P_{105} P_{106} P_{107} P_{108} P_{109} P_{110} P_{111} P_{112} P_{113} P_{114} P_{115} P_{116} P_{117} P_{118} P_{119} P_{120} P_{121} P_{122} P_{123} P_{124} P_{125} P_{126} P_{127} P_{128} P_{129} P_{130} P_{131} P_{132} P_{133} P_{134} P_{135} P_{136} P_{137} P_{138} P_{139} P_{140} P_{141} P_{142} P_{143} P_{144} P_{145} P_{146} P_{147} P_{148} P_{149} P_{150} P_{151} P_{152} P_{153} P_{154} P_{155} P_{156} P_{157} P_{158} P_{159} P_{160} P_{161} P_{162} P_{163} P_{164} P_{165} P_{166} P_{167} P_{168} P_{169} P_{170} P_{171} P_{172} P_{173} P_{174} P_{175} P_{176} P_{177} P_{178} P_{179} P_{180} P_{181} P_{182} P_{183} P_{184} P_{185} P_{186} P_{187} P_{188} P_{189} P_{190} P_{191} P_{192} P_{193} P_{194} P_{195} P_{196} P_{197} P_{198} P_{199} P_{200} $P_{