6.3 Quotientenregel

Wie leitet man eine Funktion, die aus einem Bruch besteht, ab?

Auf die Funktionen f und g in Form gewöhnlicher Differentialsteuerung an der Stelle x differenziert werden und es gilt $f(x) \neq 0$. Dann gilt:

$$f(x) = \frac{\left[\,\right]}{\left[\,\right]} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\left[\,\right]}{\left[\,\right]^2} = \frac{\left[\,\right]}{\left(\left[\,\right]\right)^2}$$

Definition 6.1: Kettenregel

Gleich der Kettenregel hat sich die Ableitung einer aus einander ordnetete, differenzierbaren Funktionen f und g wie folgt:

$$\left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Merke: Innere Ableitung, äußere Ableitung hat innere Funktion eingesetzt.

Übungen zur Ableitung mittels Kettenregel:

$f(x) = \sin(x^2)$

$f(x) = \frac{3}{\cos(x)} + 2\left(\ln(x)\right)^2$

$f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

$f(x) = \ln(x^2 + \sin(x))$

6.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Offensichtlich ist:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ableiten unter Verwendung der Kettenregel und der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x)$$

Merke:

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Übungen zur Ableitung der Umkehrfunktion:

$f(x) = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = x^2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(f^{-1}\right)'(x) = 2x$

$f(x) = \sin(x)$

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

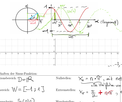
$f'(x) = \cos(x)$

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

7.1 Die $\sin(x)$-Funktion

Die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist eine ungerade trigonometrische Funktion. Man erhält die Funktionswerte $\sin(x)$ für ein Argument x wie folgt: Man trägt den Winkel x im Bogenmaß ab. Liegt der Eigenbeweis des Winkels x im Zeiteinheiten, also das $\sin(x)$, ab a Wert anzeigt (vgl. Sinusuhr auf Wikipedia [1]).



Eigenschaften der Sinus-Funktion:

(Wertebereich): $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{R}$

Nullstellen: $N_{\sin} = \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Wertebereich: $\mathbb{W}_{\sin} = [-1, 1]$

Extremstelle: $E_{\sin} = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

y-Achsenschnitt: $S_y(0|0)$

Wendestelle: $W_{\sin} = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade)

Durch Eigenbeweis Ableiten erkennt man, dass gilt: $f(x) = \cos(x)$

Definition 7.1: Allgemeinheitsmerkmale der Sinus/Cosinus

Es gilt:

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Eigenschaften der Kosinusfunktion:

(Definitionsmenge): $\mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$

Nullstellen: $N_{\cos} = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

Wertebereich: $\mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$

Extremstelle: $E_{\cos} = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

y-Achsenschnitt: $S_y(0|1)$

Wendestelle: $W_{\cos} = \pi/2 + k\pi$

Symmetrie: $f(-x) = f(x)$ (gerade)

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \sin(2x)$

$f'(x) = 2\cos(2x)$

$f(x) = \cos(3x)$

$f'(x) = -3\sin(3x)$

$f(x) = \sin^2(x)$

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$f(x) = \sin(x^2)$

$f'(x) = 2x\cos(x^2)$

$f(x) = \sin(\ln(x))$

$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \cos(x)$

$\sin(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$

$\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}