# 11 Komplexe Zahlen

## 11.1 Kartesische Darstellung

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen. Zeiten man die Zahl $i$ als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ und nennt sie die imaginäre Einheit. Dann ist $\mathbb{R}$ in der Form $\mathbb{C}$ enthalten. Jeweil. Mitnehmen Gleichung.

**Aufgabe 1**

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung
$x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm 2i}{2}$$
$$= -1 \pm i$$

Reell

Imaginär

Komplexe Zahlen lassen sich graphisch darstellen. Dazu führt man die sog. Gaußsche Zahlenebene.

Kartesische Darstellung
(zwei komplexe Zahl)

Geometrische Darstellung

Im

Re

Reelle Achse

Imaginäre Achse

Gaußsche Zahlenebene

Addition:

Geometrisch:

Frage nach Vektoraddition

## 11.2 Trigonometrische Darstellung

Im Kopf hat sich ordnung, den dieses Lage / und Winkel $\varphi$, das dieser auf die $x$-Achse einschließt. Verbreitet. Dies sind die sogenannten Polarkoordinaten $(r, \varphi)$.

## 11.3 Darstellung in Exponentialform

Eine Zahl $z$ kann mit Hilfe der Eulerschen Formel in der exponenten Exponentialform dargestellt werden.

Die Euler Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ ist eine der wichtigsten Formeln in der Mathematik.

Eine der bekanntesten Formeln in der Mathematik ist die Eulersche Identität, die sich aus der Euler Formel ergibt. Sie verbindet die wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

# 12 Vektorrechnung

## 12.1 Grundlagen

Anwendung

Kräfte

Vektor dient nicht nur zur Darstellung von Kräften

Kraftvektor

**Definition 1.1: Addition von Vektoren**

Die Addition zweier Vektoren
Die Addition zweier Vektoren ist eine Physik! Eine Kraft ist eine gerichtete Größe und hat sich zuerst Vektoren dasselbe.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

**Definition 1.2: Multiplikation mit einem Skalar (reeller Zahl)**

Beachte eine Veränderung der Länge bei der Streckung, wenn man auf einen negativen Zahl multipliziert.

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Man erhält den exponenten Eigenschaften durch Multiplikation mit $-1$

**Merke:** Vektorgleichheit

Prinzip: Vektoren sind gleich

$$\vec{a} = \vec{b}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

## 12.2 Übungen

**Aufgabe 1**

Ergänzen sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie jeweils die sogenannten Vektoren für das jeweils durch eine Zeichnung!

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$$

**Aufgabe 2**

Ergänzen Sie die Koordinaten der eingezeichneten Vektoren an 21.

## 12.3 Betrag eines Vektors

Pythagoras

2D

3D

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\vec{a}|$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

**Merke:**

Ein Vektor $\vec{a}$ heißt normiert, wenn er den Betrag 1 hat, also einen $|\vec{a}| = 1$. Ein beliebiger Vektor kann normiert werden, indem man ihn mit dem Reziprok seines Betrages multipliziert.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{Dann ist } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dann ist } \vec{a} = 1$$

Analytische Geometrie

## 12.3.2 Geraden in zwei bzw. dreidimensionalen Koordinatensystem

Beispiel 1
Gerade durch die Punkte $A(-2|1)$ und $B(3|2)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stützvektor

Richtungsvektor

Gerade

Übung

Stellen Sie eine Gerade $h$ auf, die durch die Punkte $C(-1|1)$ und $D(1|-1)$ verläuft.
Stellen Sie, ob der Punkte $E(-2|-4)$ auf $h$ liegt.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $g$ und $h$.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} + r \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{FALSCH}$$

$$\text{LGS} \begin{cases} -1 + 2r = -2 & \text{I} \\ 1 - 2r = -4 & \text{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + 2r = -2 & \text{I} \\ -2r = -5 & \text{II} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## 12.3.4 Lagebeziehungen

Nach der Arbeit an der Analysis Aufgaben, interessiert, kamen die Diskutierten, ergibt sich die Gerade Lebensgefahren. Dann ergibt Gleichungen lehrer dies Aussagen über die Lagebeziehungen der Objekte.

**Lage von Geraden**

Bestimmung: Im R3-Raum ergibt sich ein unterbestimmtes LGS, in dem die zwei/drei Schritten zwei bis Mehrgeraden(R3) bestimmt werden können.

| Lage | Lösung im LGS | R3 und |
|---|---|---|
| schneiden sich | eindeutig | nur einfach |
| parallel | keine | Vielfaches $r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ |
| windschief | keine | keine Vielfaches |
| ununterscheidbar (gleich) | unendl. viele | |

**Lage Gerade/Ebene**

Hier ergibt sich ein unterbestimmtes LGS, in dem die Lösung nach Anbindung der Gerade Schnittpunkt Ebene ist die Ebene Teil eingetreten.

Beispiel für die Schnittpunkt von Gerade und Ebene

ist die Ebene

| Lage | Lösung im LGS |
|---|---|
| schneiden sich | eindeutige Lösung |
| parallel | keine Lösung |
| ununterscheidbar (gleich) | unendl. viele |

$E = g$

LGS

## 12.4 Skalarprodukt, Vektorprodukt

Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

**Definition 1.1: Skalarprodukt**

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Winkel $\varphi$ einschließt, liefert als Ergebnis ein Skalar (reelle Zahl).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

**Merke:** Prinzip:

In der Praxis vorzuziehen benutzt man ab folgende Berechnung über die Koordinaten der Vektoren.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$$

**Definition 1.2: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)**

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Kaplan vom Vektor $\vec{c}$, der gleich senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und dessen der Rechtssystem bildet (erste wieder Hand Regel). Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt der Parallelogramm, die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Beispiel

Kreuzprodukt

Die Reihe produzieren Anordnung in der Determinante Determinante.

Prüfen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$ ✓

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 3 + 0 = 3$ ✗

In Geometrie Raum ist eine Ebene nun anders darstellen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stützvektor

2 Richtungsvektoren
2 Spannvektoren

① Vorschlag: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ein Punkt $X$ liegt in $E$, falls der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX}$ senkrecht zu $\vec{n}$ ist:

$$\vec{n} * \overrightarrow{PX} = 0$$

$$E: \vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad \text{Normalform}$$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x - y - 3z - (4 - 0 - 0) = 0$$

$$= -7 \quad \text{Koordinatenform}$$

$$E: 4x - y - 3z = -7$$

Normalenvektor ablesen: ?