

13 Mengen und Ungleichungen

$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

13.1 Übungen[1] zur Notation von Mengen

$A = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Primzahlen $\Rightarrow$ Teiler 1 und sich selbst!

Aufgabe 1 Geben Sie an, welchen Zahlen zu den folgenden Mengen gehören.

- (a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\}$ (d) $D = \{x \in \mathbb{P} \mid x \leq 40\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$
(b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 4\}$ (e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 5\} = \{2, 3, 4\}$
(c) $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z \text{ ist Teiler von } 24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Aufgabe 2

Geben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Bedingung an, welche die Elemente erfüllen müssen (vgl. Aufgabe 1).

- (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 8\}$ (d) $D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19\} = \{x \in \mathbb{P} \mid 5 \leq x \leq 19\}$
(b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 4\}$ (e) $E = \{4, 5\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 6\}$
(c) $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z \text{ ist Teiler von } 24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (f) $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie...

- (a) $A \cup B, B \cap C, C \cap D, D \cap E$ und $E \cap F$ (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

Aufgabe 4

Geben Sie die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.

- (a) mit den Mengen von Aufgabe 1! (b) mit den Mengen von Aufgabe 2!

Verknüpfung von Mengen:
Bsp: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $B = \{3, 4, 5, 10\}$
• $A \cap B = \{3, 4, 5\}$
Logisch: UND
• $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$
Logisch: ODER
• $A \setminus B = \{1, 2, 6\}$
"ohne"

a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 $\approx \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x\}$
b) $B \cap C = \{6, 8, 12, 15, \dots\}$
c) $A \cap D = C$
d) $D \cap C = D$

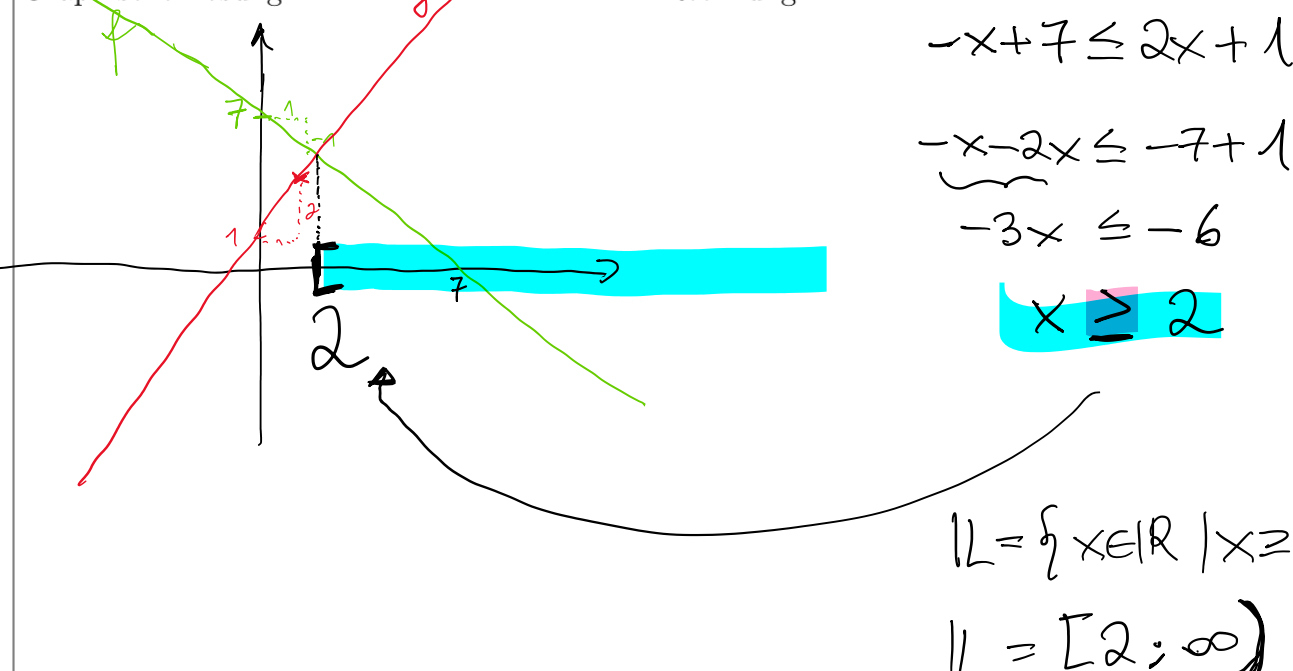
e) $D \cup E = \{4, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} = \{x \in \mathbb{P} \mid y \in \mathbb{N} \mid y = 4 \vee x \in [5, 19]\}$
f) $E \cap F = \{5\}$
Leere Menge

13 Mengen und Ungleichungen

13.2 Ungleichungen

Beispiel:

Graphische Lösung:



Rechnung:

$-x + 7 \leq 2x + 1$
 $-x - 2x \leq -7 + 1$
 $-3x \leq -6$
 $x \geq 2$
! : (-3)

Merke:

Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Relationszeichen um!!!

13 Mengen und Ungleichungen

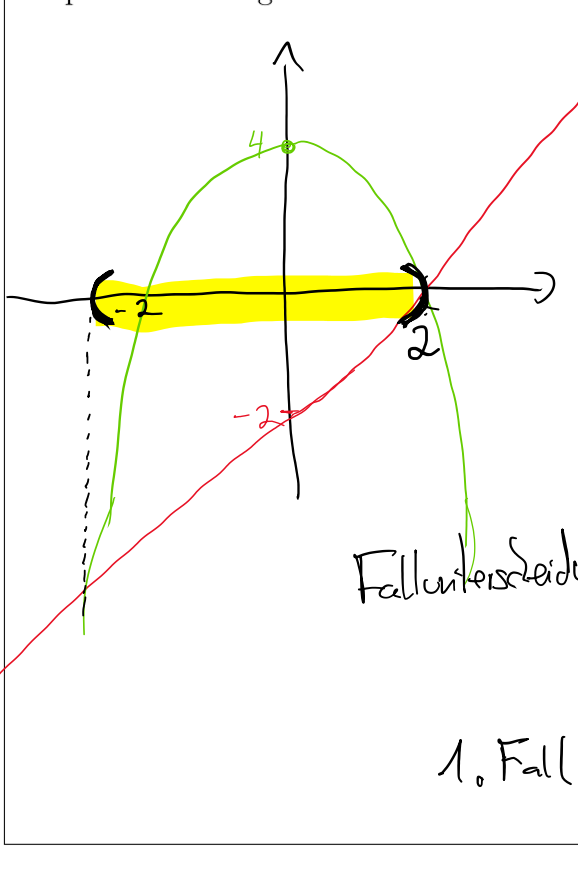
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung.

$-x^2 + 4 > (x - 2)$

Tipp: Stellen Sie die Gleichung so um, dass eine Seite null wird. Bestimmen Sie dann die Linearfaktorzerlegung und führen damit eine Fallunterscheidung durch.

Graphische Lösung:



Rechnung:

$-x^2 + 4 > x - 2$
 $-x^2 - x + 6 > 0$
 $x^2 + x - 6 < 0$
oder
Linearfaktorzerlegung:
 $(x + 3) \cdot (x - 2) < 0$

Fallunterscheidung:
1. Fall: $x + 3 > 0$ und $x - 2 < 0$
 $x > -3$ und $x < 2$
 $L_1 = (-3; 2)$

2. Fall: $x + 3 < 0$ und $x - 2 > 0$
 $x < -3$ und $x > 2$
 $L_2 = \emptyset$

Gesamtlösung

$L = L_1 \cup L_2$
 $L = (-3; 2) \cup \emptyset$
 $L = (-3; 2)$

13 Mengen und Ungleichungen

13.3 Betragsungleichungen

Wiederholung:

$f(x) = |x| := \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0 \\ -x, & \text{für } x < 0 \end{cases}$

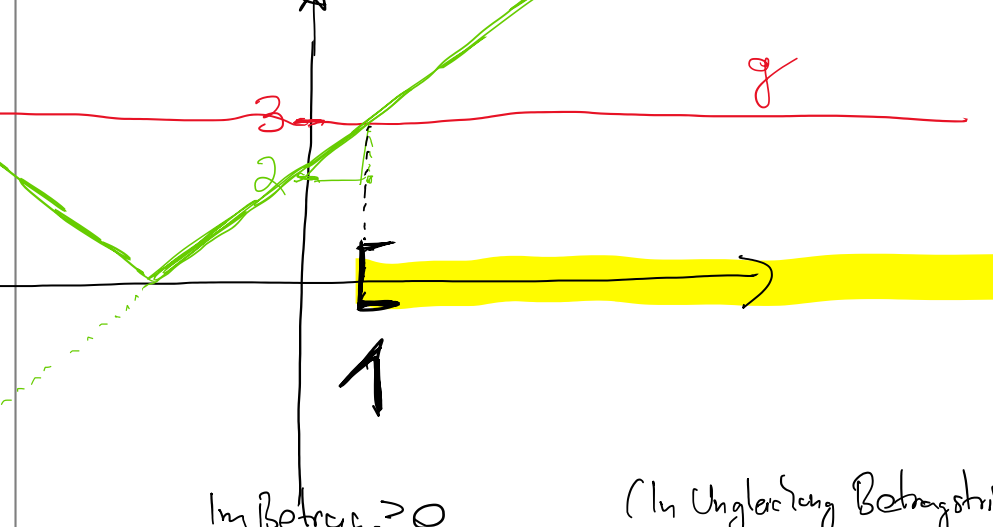
Merke:

Bei der rechnerischen Lösung kann folgender Zusammenhang hilfreich sein: $|x|^2 = x^2$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$|x + 2| \geq 3$

Graphische Lösung:

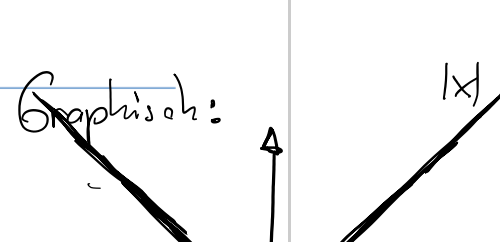


Rechnung:

$|x + 2| \geq 3$
 $(x + 2)^2 \geq 9$
 $(x + 2)^2 \geq \pm 3$
 $x + 2 \leq -3$ oder $x + 2 \geq 3$
 $x \leq -5$ oder $x \geq 1$
 $L_1 = (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$

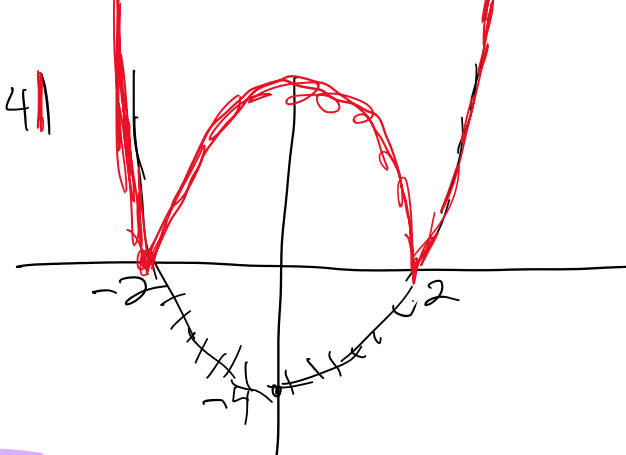
Rechnung

1. Fall: $x + 2 \geq 0$ dann $x + 2 \geq 3$ $x \geq 1$
2. Fall: $x + 2 < 0$ dann $-(x + 2) \geq 3$ $x \leq -5$
 $L_2 = (-\infty; -5]$
 $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$



oder

$|x - 4|$



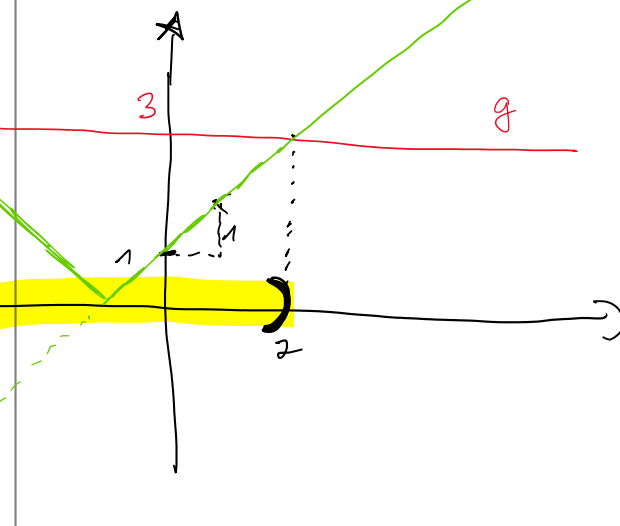
13 Mengen und Ungleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichung.

$|x + 1| < 3$

Graphische Lösung:



Rechnung:

1. Fall: $x + 1 \geq 0$ dann $x + 1 < 3$ $x < 2$
2. Fall: $x + 1 < 0$ dann $-(x + 1) < 3$ $x > -4$
 $L_1 = (-4; 2)$

Rechnung

$x + 1 < 0$ dann $-(x + 1) < 3$ $x > -4$
 $x + 1 \geq 0$ dann $x + 1 < 3$ $x < 2$
 $L_2 = (-4; 2)$
 $L = L_1 \cup L_2 = (-4; 2)$