Mathematisches Modellieren II: Differentialgleichungen

21. August 2005

1 Einleitung

Differentialgleichungen, speziell Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, tauchen oftmals bei der Beschreibung von Bewegungsabläufen oder Zustandsänderungen in der Natur auf:

1. So ist in der Biologie die Zunahme von Bakterien abhängig von ihrer Anzahl f, in der Tat sogar proportional zu ihr, also

   $$f'(x) = cf(x) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) - cf(x) = 0$$

   für eine geeignete Konstante $c > 0$.

2. Ebenso gilt in der Mechanik bei einer hängenden, (idealerweise ungedämpft) schwingenden Feder für die Position s

   $$s''(x) = -cs(x) \quad \Leftrightarrow \quad s''(x) + cs(x) = 0 \ ,$$

   für eine geeignete Konstante $c > 0$, d.h., die Beschleunigung ist proportional zum negativen der Position.

3. Auch in der Elektrotechnik ergeben sich Differentialgleichungen, etwa bei der Modellierung von Schwingkreisen. So erhält man etwa für die Spannung U in einem Parallelschwingkreis die Differentialgleichung

   $$U''(t) + \frac{1}{RC}U'(t) + \frac{1}{LC}U(t) \ = \ 0 \ .$$

   Hierbei ist $R > 0$ der Widerstand, $L > 0$ die Induktivität und $C > 0$ die Kapazität der beteiligten Komponenten.

Wir kommen auf diese Beispiele noch mehrmals zurück.

2 Praktikable Theorie

2.1 Differentialgleichungen: Definition und Beispiele

Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Lösung (Scharen von) Funktionen sind. In diesen Gleichungen sind die gesuchte Funktion und eine oder mehrere ihrer Ableitungen gekoppelt. Im einfachsten Fall (und nur mit dem werden wir uns hier näher beschäftigen) erfolgt diese Kopplung linear:

Definition 1 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, und f eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann heißt*

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) \;=\; 0 \tag{1}$$

lineare homogene Differentialgleichung (DGL) n-ten Grades ($a_n \neq 0$) mit konstanten Koeffizienten. Ist die rechte Seite der Gleichung (1) eine Funktion $g(x) \neq 0$ und unabhängig von f, so nennen wir die Differentialgleichung inhomogen.

Jede n-mal stetig differenzierbare Funktion, die (1) löst, heißt Lösung der Differentialgleichung.

Bemerkung 1 *Sind f_1 und f_2 Lösungen der Differentialgleichung (1), so ist jede Linearkombination dieser Lösungen $c_1 f_1 + c_2 f_2$ ebenfalls Lösung von (1). (Beweis: Übung!)*

Wie aber findet man Lösungen zu obigen Beispielen, wie findet man allgemein alle Lösungen von (1)?

Nun, im Fall des Bakterienwachstums lässt sich die Lösung raten: die Ableitung ist bis auf einen konstanten Faktor gleich der Funktion – das klingt nach der Exponentialfunktion: In der Tat, $f(x) = \exp(cx)$ löst das erste Beispiel, und damit ist auch jedes reelle Vielfache eine Lösung. Allgemein gilt also:

$$f'(x) = cf(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = K\, e^{cx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Das zweite und das dritte Beispiel fallen beide unter die allgemeinere Form

$$f''(x) + pf'(x) + qf(x) \;=\; 0\,.$$

Welche Lösungen hat diese DGL? Angenommen, auch hier wäre die Exponentialfunktion zielführend, es wäre also

$$f(x) \;=\; e^{\alpha x} \quad (\text{mit } \; f'(x) = \alpha\, e^{\alpha x} \text{ und } \; f''(x) = \alpha^2\, e^{\alpha x}\;)$$

eine Lösung mit noch zu ermittelndem α. Dann muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= f''(x) + pf'(x) + qf(x) \\ &= \alpha^2\, e^{\alpha x} + p\,\alpha\, e^{\alpha x} + q\, e^{\alpha x} \\ &= \left(\alpha^2 + p\,\alpha + q\right)\; e^{\alpha x} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + p\,\alpha + q &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist bekannt, dass dieses quadratische Polynom

1. zwei (verschiedene) reelle Lösungen α_1 und α_2,
2. eine (doppelte) reelle Lösung α_0 oder
3. zwei (konjugiert) komplexe Lösungen $\alpha_0 \pm i\beta_0$

besitzt, abhängig davon, ob $p^2 - 4q$ größer als, gleich oder kleiner als Null ist. Im ersten Fall ist in der Tat

$$f(x) \;=\; k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$$

für beliebige Konstanten $k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Bei einer doppelten Nullstelle (es sei hier an die Partialbruchzerlegung erinnert) hilft ein Polynomterm ersten Grades (allgemein: ein Grad weniger als die Vielfachheit!) als Faktor weiter. Es gilt

$$f(x) \;=\; (k_0 + k_1\, x)\; e^{\alpha_0 x}\;,$$

wiederum mit beliebigen Konstanten $k_0,\, k_1 \in \mathbb{R}$ (Probe: Übung!). Doch was macht man im Fall eines Paars konjugiert komplexer Nullstellen, wo doch eine reelle Lösung der DGL sinnvoll erscheint? Zunächst erinnern wir uns an folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} e^{(\alpha_0 \pm i\beta_0)\,x} &= e^{\alpha_0\, x}\; e^{\pm i\beta_0\, x} \\ &= e^{\alpha_0\, x}\; (\cos(\pm\beta_0\, x) + i\, \sin(\pm\beta_0\, x)) \\ &= e^{\alpha_0\, x}\; (\cos(\beta_0\, x) \pm i\, \sin(\beta_0\, x))\;. \end{aligned}$$

Eingedenk dessen, dass auch **jede** Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung ist (siehe Bemerkung 1), wählt man nunmehr die durch 2 geteilte Summe sowie die durch $2i$ geteilte Differenz als **Basislösungen** (Diese sind in der Tat **linear unabhängig**!!). Man erhält somit

$$f_1(x) \;=\; e^{\alpha_0\, x}\; \cos(\beta_0\, x) \quad \text{und} \quad f_2(x) \;=\; e^{\alpha_0\, x}\; \sin(\beta_0\, x)$$

als Lösungskomponenten, die (beliebig) linear kombiniert werden können.

Bemerkung 2 *Man nennt das Polynom (2) (i.A. n-ten Grades) das Charakteristische Polynom der DGL (1), da seine Nullstellen mittelbar die Lösungsmenge liefern.*

2.2 Anfangswertaufgaben: Definition und Beispiele

Kennt man über obige Zusammenhänge hinaus noch die Informationen an einer Stelle bzw. zu einem bestimmten Zeitpunkt (und zwar genau so viele, wie der Höchstgrad der DGL angibt), so spricht man von einer **Anfangswertaufgabe**, deren Lösung nunmehr eindeutig ist:

Definition 2 *Seien zur Differentialgleichung (1) an der Stelle x_0 die Werte*

$$f^{(n-1)}(x_0) \;=\; b_{n-1}, \;\; \ldots, \;\; f''(x_0) \;=\; b_2, \;\; f'(x_0) \;=\; b_1 \;\; \textit{und}\; f(x_0) \;=\; b_0 \qquad (3)$$

gegeben. Dann heißt die Gleichung (1) mit den Bedingungen (3) Anfangswertaufgabe (AWA). Die n-mal stetig differenzierbare Funktion, die (1), (3) löst, heißt (eindeutige) Lösung der Anfangswertaufgabe.

Welche Konsequenzen hat diese Definition für die obigen drei Beispiele?

Nun, im Fall der Bakterien kann aus einer Anfangsanzahl, etwa $f(0) = K_0 > 0$, $K_0 \in \mathbb{R}$, die Lösung eindeutig bestimmt werden. Wegen $K_0 = f(0) = k\exp(0) = k$ gilt $k = K_0$ und somit

$$f'(x) - cf(x) = 0\,, \quad f(0) = K_0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = K_0 e^{cx}\ .$$

Im zweiten Beispiel bestimmt man zunächst die Nullstellen des zugehörigen Charakteristischen Polynoms. Es ist

$$s''(x) + cs(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \pm i\sqrt{c}\,,$$

also erhält man die Basislösungen

$$s_1(x) = \cos(\sqrt{c}\,x) \quad \text{und} \quad s_2(x) = \sin(\sqrt{c}\,x)\,.$$

Aus physikalischer Sicht sind eine Auslenkung der Feder um s_0 aus der Ruhelage 0 und eine Anfangsgeschwindigkeit 0 mögliche sinnvolle Anfangsbedingungen. Interpretiert man Auslenkung nach unten negativ, nach oben positiv, so bedeutet das mathematisch, dass $s(0) = -s_0$, für positives s_0, und $s'(0) = 0$ als Anfangsbedingungen gesetzt werden. Wegen

$$s(x) = k_1\cos(\sqrt{c}\,x) + k_2\sin(\sqrt{c}\,x) \quad \text{und} \quad s'(x) = -k_1\sqrt{c}\sin(\sqrt{c}\,x) + k_2\sqrt{c}\cos(\sqrt{c}\,x)$$

folgt mit diesen Anfangsbedingungen

$$-s_0 = s(0) = k_1\cos(0) + k_2\sin(0) = k_1 \quad \text{und} \quad 0 = s'(0) = -k_1\sqrt{c}\sin(0) + k_2\sqrt{c}\cos(0) = k_2\sqrt{c}\,,$$

also insgesamt $k_1 = -s_0$ und $k_2 = 0$. Die eindeutige Lösung der AWA

$$s''(x) + cs(x) = 0, \quad s(0) = -s_0,\ s'(0) = 0$$

ist demnach

$$s(x) = -s_0\cos(\sqrt{c}\,x)$$

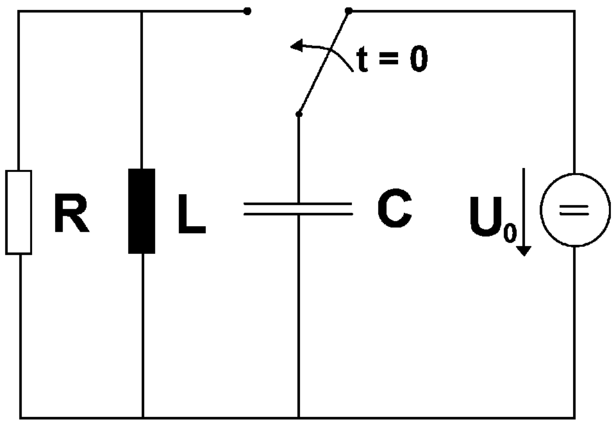
Beim Schwingkreis (drittes Beispiel) ist $p^2 - 4q$ stets negativ, wenn $L < 4R^2C$ (Nachweis: Übung!). Als Nullstellen des Charakteristischen Polynoms erhält man

$$\alpha^2 + \frac{1}{RC}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2RC} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

und damit eine Lösung wie im obigen allgemeinen Fall. Die Anfangsbedingungen sind hier nicht ganz so einfach einzusehen. Wir beschäftigen uns mit diesem Beispiel eingehender im nächsten Abschnitt.

3 Ein praktischer Zugang zum (Parallel-) Schwingkreis

Gegeben sei folgender paralleler Schwingkreis:



Der Kondensator wird zunächst geladen (Spannungsquelle U_0). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter umgelegt. Es gelten dann die folgenden Beziehungen für die auftretenden Ströme I_R, I_L und I_C. Es gelten

$$U(t) \;=\; R * I_R(t) \;, \quad U(t) \;=\; L * I_L'(t) \quad \text{und} \tag{4}$$

$$C * U'(t) \;=\; I_C(t) \tag{5}$$

sowie die Maschenregel

$$0 \;=\; I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) \;. \tag{6}$$

Nach Integrieren von I_L' erhält man $I_L(t) = \int U(t)dt/L$. Nach Einsetzen in die Maschenregel und anschließendem Differenzieren ergibt sich nach Umformung die Differentialgleichung

$$U''(t) + \frac{1}{RC}\,U'(t) + \frac{1}{LC}\,U(t) \;=\; 0 \;. \tag{7}$$

Die Spannung U ist zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich $-U_0$ (also $U(0) = -U_0$), und für ihre erste Ableitung gilt $U'(0) = 0$.

Wir setzen abkürzend (siehe oben)

$$\alpha_0 = \frac{1}{2RC} \qquad \text{und} \qquad \beta_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{-\alpha_0 t}\,(k_1 \cos(\beta_0 t) \;+\; k_2 \sin(\beta_0 t)) \\ \Rightarrow \quad U'(t) &= e^{-\alpha_0 t}\,((-\alpha_0 k_1 + \beta_0 k_2)\cos(\beta_0 t) \;+\; (-\alpha_0 k_2 - \beta_0 k_1)\sin(\beta_0 t)) \;. \end{aligned}$$

Löst man die durch Einsetzen in $U(t)$ und $U'(t)$ entstehenden Gleichungen

$$-U_0 = U(0) = e^0(k_1 \cos(0) + k_2 \sin(0)) = k_1$$

und

$$0 = U'(0) = e^0((-\alpha_0 k_1 + \beta_0 k_2)\cos(0) \ + \ (-\alpha_0 k_2 - \beta_0 k_1)\sin(0)) = (-\alpha_0 k_1 + \beta_0 k_2)$$

nach k_1 und k_2 auf (Übung!), so erhält man

$$k_1 = -U_0 \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} U_0 \ .$$

Die (noch von den konkreten Bauteilen abhängige) Lösung der Schwingkreis–DGL lautet somit

$$U(t) = -U_0\, e^{-\alpha_0 t} \left(\cos(\beta_0\, t) + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \sin(\beta_0\, t) \right)$$

Bemerkung 3 *Ausgehend von der Schwingkreis-Bedingung $L < 4R^2C$ sind zwei Bemerkungen angebracht:*

1. *Der oben betrachtete Parallel-Schwingkreis hat auf den zweiten Blick eine starke Ähnlichkeit zur (ungedämpft) schwingenden Feder:*

   Ist $\alpha_0 \approx 0$ und sehr viel kleiner als β_0, ist also L sehr viel kleiner als $2R^2C$, so verhält sich auch der Schwingkreis nahezu ungedämpft. In diesem Fall ist

   $$U(t) \approx -U_0\, \cos(\beta_0\, t) \ .$$

   Umgekehrt lässt sich selbstverständlich auch eine mechanische, gedämpfte Schwingung durch eine DGL modellieren.

2. *Im umgekehrten Fall, also $L \geq 4R^2C$, schwingt der Schwingkreis überhaupt nicht. Als Lösung erhält man zwei (bei $L = 4R^2C$ genau eine) abklingende Exponential-Funktionen (zwei reelle bzw. eine doppelte reelle Lösung, siehe oben!) Mit $0 < \beta_0 \approx 0$ ist auch die Frequenz der Schwingung nahe Null, die Wellenllänge also sehr groß.*

4 Ein eher theoretisches Beispiel

Gegeben sei die DGL

$$f^{(v)}(x) + 3f^{(iv)}(x) + 7f'''(x) - 71f''(x) + 24f'(x) + 100f(x) = 0$$

Gesucht ist die Lösungsschar. Wir benötigen das Charakteristische Polynom und dessen Nullstellen. Nach einigem Raten und Faktorisieren (mittels Polynomdivision oder Hornerschema) erhalten wir

$$0 \ = \ \alpha^5 + 3\alpha^4 + 7\alpha^3 - 71\alpha^2 + 24\alpha + 100 \ = \ (\alpha+1)(\alpha-2)^2(\alpha^2+6\alpha+25)$$

und damit

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_{2,3} = 2, \quad \text{und} \quad \alpha_{4,5} = -3 \pm i\,4 \ .$$

Es ergibt sich die Lösungsschar

$$f(x) \ = \ k_1 e^{-x} + (k_2 + k_3 x)\, e^{2x} + e^{-3x}(k_4 \cos(4x) + k_5 \sin(4x)) \ .$$

Zur eindeutigen Festlegung der Lösung bedarf es offensichtlich 5 Bedingungen, zum Beispiel:

$$f(0)=3, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=19, \quad f'''(0)=-239 \quad \text{und} \quad f^{iv}(0)=1059 \; .$$

Bildet man die ersten 4 Ableitungen von f und setzt darin $x=0$, so erhält man nach einigen Umformungen (besser mit CAS)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -k_1 e^{-x} + (2k_2 + k_3 + 2k_3 x)\, e^{2x} \\
&\quad + e^{-3x}((-3k_4 + 4k_5)\cos(4x) + (-4k_4 - 3k_5)\sin(4x)) \\
f''(x) &= k_1 e^{-x} + 4(k_2 + k_3 + k_3 x)\, e^{2x} \\
&\quad + e^{-3x}((-7k_4 - 24k_5)\cos(4x) + (24k_4 - 7k_5)\sin(4x)) \\
f'''(x) &= -k_1 e^{-x} + 4(2k_2 + 3k_3 + 2k_3 x)\, e^{2x} \\
&\quad + e^{-3x}((117k_4 + 44k_5)\cos(4x) + (-44k_4 + 117k_5)\sin(4x)) \\
f^{(iv)}(x) &= k_1 e^{-x} + 16(k_2 + 2k_3 + k_3 x)\, e^{2x} \\
&\quad + e^{-3x}((-527k_4 + 336k_5)\cos(4x) + (-336k_4 - 527k_5)\sin(4x)) \; .
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{array}{rrrrrcr}
k_1 & +k_2 & & +k_4 & & = & 3 \\
-k_1 & +2k_2 & +k_3 & -3k_4 & +4k_5 & = & 1 \\
k_1 & +4k_2 & +4k_3 & -7k_4 & -24k_5 & = & 19 \\
-k_1 & +8k_2 & +12k_3 & +117k_4 & +44k_5 & = & -239 \\
k_1 & +16k_2 & +32k_3 & -527k_4 & +336k_5 & = & 1059
\end{array} \; .$$

Nach Auflösen (man eliminiere zuerst k_3 und k_5) erhält man

$$k_1 = 5; \quad k_2 = k_3 = 0, \quad k_4 = -2 \quad \text{und} \quad k_5 = 0 \; ,$$

und abschließend die Lösung der AWA

$$f(x) \;=\; 5e^{-x} - 2e^{-3x}\cos(4x) \; .$$

5 Aufgaben

Aufgabe 1 *Bestimmen Sie die Lösungsschar der DGL:*

a) $f'(x) - 3f(x) = 0$ *b)* $f''(x) - 9f(x) = 0$ *c)* $f''(x) - 6f'(x) + 5f(x) = 0$

d) $f''(x) + 8f'(x) + 25f(x) = 0$ *e)* $f^{(iv)}(x) - 5f''(x) - 36f(x) = 0$

f) $f'''(x) + 6f''(x) + 12f'(x) + 8f(x) = 0$ *g)* $f^{(iv)} + 2f'''(x) + f''(x) - 2f'(x) - 2f(x) = 0$

Aufgabe 2 *Bestimmen Sie die Lösung zu den DGLn aus Aufgabe 1 mit den AWen:*

a) $f(1) = 1$ *b)* $f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ *c)* $f(0) = f'(0) = 1$

d) $f(0) = 0.25,\ f'(0) = -1$ *e)* $f(0) = 1,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = -4,\ f'''(0) = -8$

f) $f(1) = 0.25e,\ f'(1) = -0.5e,\ f''(1) = e$ *g)* $f(0) = f'''(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1$

Aufgabe 3 *Vollziehen Sie*

a) die Modellierung der DGL   b) die allgemeine Lösung der AWA

beim Parallel–Schwingkreis nach.

Aufgabe 4 *Ermitteln Sie alle im Schwingkreis auftauchenden Ströme für die*

a) allgemeine Lösungsschar der DGL   b) allgemeine Lösung der AWA

(also $I_C(t), I_L(t)$ *und* $I_R(t)$*).*

Aufgabe 5 *Überprüfen Sie die Schwingkreisbedingung* $L < 4R^2C$ *und lösen Sie auch die nicht-schwingenden Fälle. Gibt es eine Schaltung, bei der der Schwingkreis ungedämpft schwingt?*

Aufgabe 6 *Im vorangegangenen Abschnitt („Ein eher theoretisches Beispiel“) ist die Lösung der AWA eine aus einer abklingenden und einer abklingend schwingenden Funktion zusammengesetzt. Für technische Bereiche ist solch eine Funktion stabil (Allgemeiner: wenn nur Exponentialfunktionen mit negativen Exponenten in der Lösung auftauchen).*

Vollziehen Sie die Lösungsschritte nach!

Aufgabe 7 *Lösen Sie die AWA (aus Aufgabe 6) erneut mit leicht gestörten AWen, etwa mit*

$$f(0) = 3, \quad f'(0) = 1.01, \quad f''(0) = 19.04, \quad f'''(0) = -238.88 \quad \textit{und} \quad f^{iv}(0) = 1059.32\ .$$

Was folgt nun für die Lösung? Ist sie noch stabil?

Bedenken Sie, dass bei Einsatz eines Computers im Allgemeinen mit Näherungen gerechnet wird, so dass eine Abweichung wie oden durchaus wahrscheinlich ist!