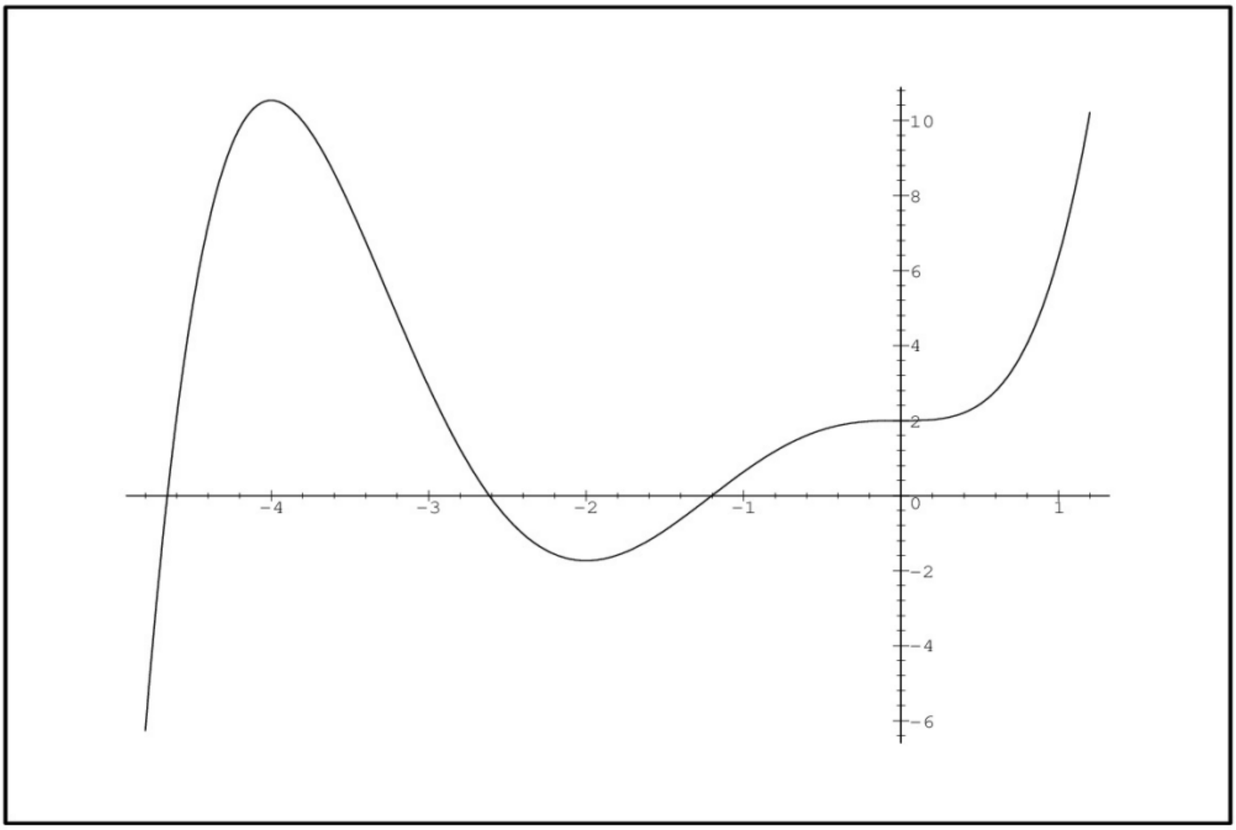
Dr. Markus Schröder

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

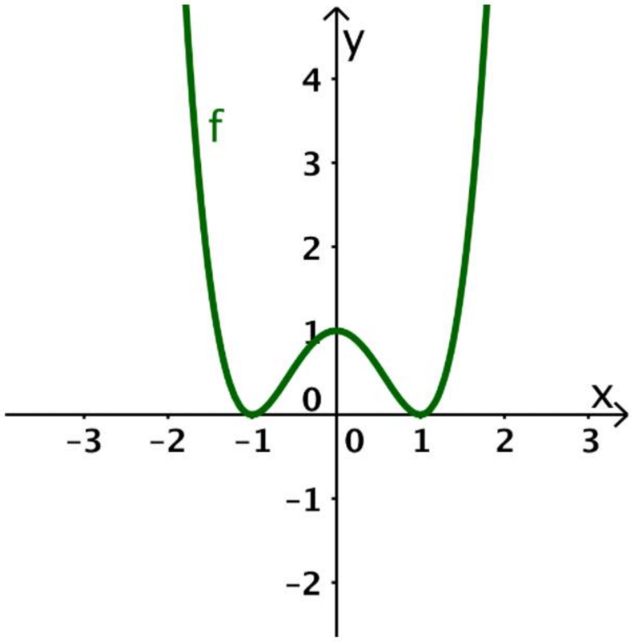
Aufgabe 1

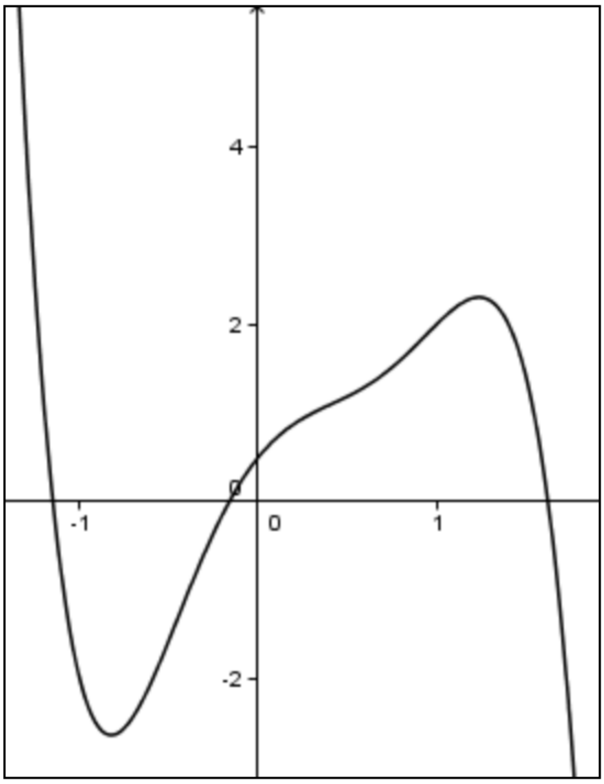
Nachfolgend ist der Graph einer Funktion f gegeben. Ergänzen Sie diesen um eine Skizze seiner ersten (f') und seiner zweiten Ableitung (f'').



Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 2 Skizzieren Sie f'(x)





Quelle: http://www.mathe-trainer.de/Klasse10/Ganzrationale%20Funktionen/grafisches%20ableiten/Block1/Aufg2/Aufg.htm

https://de.serlo.org/mathe/26407/aufgaben-zum-graphischen-differenzieren

Mathematatik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lage und Art der **Extremstellen** *der folgenden Funktionen f_1 und f_2. Bestimmen Sie weiterhin ihre* **Wendestellen** *(hierbei nur notwendige Bedingung).*

$$f_1(x) \;=\; x^4 - 8x^2 - 9\,, \qquad f_2(x) \;=\; \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3\,,$$

Zusatz:

Folgende Aufgaben sind ***jeweils*** *auszuführen:*

(i) *Bestimmen Sie die Nullstellen und geben Sie die Linearfaktorzerlegung an.*

(ii) *Ermitteln Sie die Schnittstelle mit der y-Achse.*

(iii) *Untersuchen Sie die Funktion auf das Randverhalten.*

(iv) *Skizzieren Sie den Graph der Funktion in ein Koordinatensystem.*

Aufgabe 4

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 10t \cdot e^{-0.5t}$$

die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t.

(i) *Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist.*

(ii) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.*

Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear

(iii) *Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $P(6,\ f(6))$ beschrieben.*
Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist.

Mathematik Vorbereitungskurs
Übungen Differentialrechnung

Aufgabe 5

Ein Designer (Gestalter!) beschließt, seine (zylindrische) Hautcreme-Dose in einer Kugel zu verpacken. Diese soll den Radius $R = 5$ cm besitzen. Wie groß ist dann das maximale Volumen $\mathcal{V}$ des in der Kugel unterzubringenden Zylinders, überlegt er. Aus dem Mathematik-Unterricht von Herrn Fredebeul weiß er noch

$$\mathcal{V}_{Zylinder} = r^2 \pi h \, ,$$

und nach einigem Nachdenken erkennt er (Begründung??)

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = r^2 + \frac{h^2}{4} \, .$$

Helfen Sie ihm weiter. Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h des optimalen Zylinders. Wie groß ist sein Volumen $\mathcal{V}$? Passt eine Creme mit 300 ml hinein?

Aufgabe 6

a)

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, dessen Graph durch die Punkte $A(1\,|\,-32)$, $B(-2\,|\,4)$, $C(-3\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0)$ verläuft.

b)

Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: Sie hat im Punkt $(0, 0)$ eine Extremstelle, in $x = 3$ eine Nullstelle und in $x = 1$ die Steigung -3.
Bestimmen Sie die gesuchte Funktionsgleichung!

c) Bestimmen Sie den Term einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades, welche durch den Punkt P(0 |1) verläuft und an der Stelle x= 1 eine Nullstelle und ein Minimum besitzt.