12.08.2024

Sonntag, 18. Februar 2024 13:19

1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

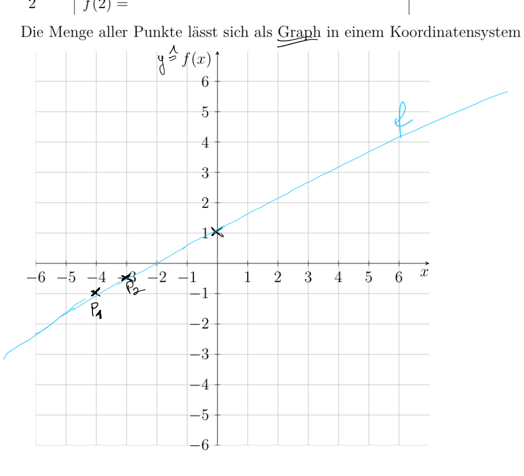
1.1 Lineare Funktionen

Der Graph einer Linearen Funktion ist immer eine Gerade.
Es folgt eine Analyse einer Linearen Funktion an einem Beispiel, mit der Ziel, anhand bestimmter charakteristischer Eigenschaften den Graph zu skizzieren:
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ Funktionsterm

Name "f" · Variable der Funktion · y-KO ≙ Funktionswert

x	$f(x)$	Punkte
−4	$f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)+1 = -2+1 = -1$	$P_1(-4\mid-1)$
−3	$f(-3) = \frac{1}{2}\cdot(-3)+1 = -0{,}5$	$P_2(-3\mid-0{,}5)$
−2	$f(-2) =$ ⋮	
−1	$f(-1) =$ ⋮	
0	$f(0) = \frac{1}{2}\cdot 0+1$	$P_5(0\mid 1)$
1	$f(1) =$	
2	$f(2) =$	

Die Menge aller Punkte lässt sich als Graph in einem Koordinatensystem darstellen:



Definition 1.1: Funktion

$\mathbb{R}$ ≙ Reellen Zahlen

Eine Funktion ordnet jedem x aus dem Definitionsbereich (die Zahlen, die man für x einsetzen darf) eindeutig einen Funktionswert $f(x)$ (die y-Koordinate) aus dem Wertebereich (Menge aller Funktionswerte) zu.

keine Funktion! 2 y-Werte!

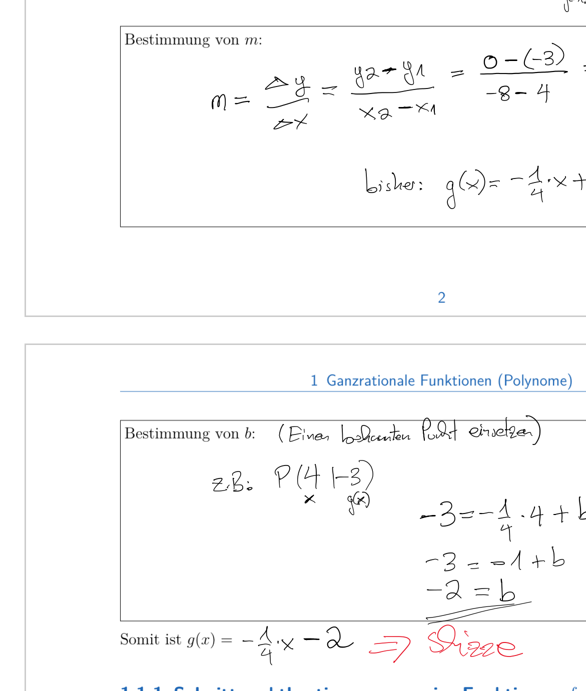
Den Graph einer Linearen Funktion kann man auch direkt mittels der im Funktionsterm vorhandenen Koeffizienten skizzieren:

allg: $f(x) = m\cdot x + b$ ← y-Achsenabschnitt (Schnittstelle mit y-Achse)

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ in Richtung y-Achse / in Richtung x-Achse



$g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

$m = \frac{-1}{4} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$g(x) = 0$; $-\frac{1}{4}x - 2 = 0 \quad |+2$; $-\frac{1}{4}x = 2 \quad |:(-\frac{1}{4})$; $x = 2\cdot(-\frac{4}{1}) = -8$ — Nullstelle; Nullstelle; Schnittpunkt

Das „Gegenteil“ zur Analyse ist die Synthese eines Funktionsterms aus gegebenen Daten:
Gesucht ist eine Lineare Funktion g, die durch die Punkte $P(4\mid-3)$ und $Q(-8\mid 0)$ verläuft.

$$g(x) = m\cdot x + b$$

Bestimmung von m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{-8-4} = \frac{3}{-12} = -\frac{1}{4}$$

bisher: $g(x) = -\frac{1}{4}\cdot x + b$

Bestimmung von b: (Einen bekannten Punkt einsetzen)

z.B.: $P(4\mid-3)$

$-3 = -\frac{1}{4}\cdot 4 + b$
$-3 = -1 + b \quad |+1$
$-2 = b$

Somit ist $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$ ⇒ Skizze

1.1.1 Schnittpunktbestimmung zweier Funktionen f und g

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = g(x)$ "gleiche y-KO!"

$f(x) = g(x)$

$\frac{1}{2}\cdot x + 1 = -\frac{1}{4}x - 2 \quad |+\frac{1}{4}x$ (Lineare Gleichung, nur x als Variable) ↳ Umstellen nach der Variablen!

$\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = -2 \quad |-1$

$\frac{2}{4}x + \frac{1}{4}x = -2 - 1$

$\frac{3}{4}x = -3 \quad |:\frac{3}{4}$ (mit Kehrwert multiplizieren)

$x = -3\cdot\frac{4}{3} = -4$ ← x-KO vom Schnittpunkt

$S(-4\mid-1)$; $f(-4) = -1$

1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer Quadratischen Funktion ist immer eine Parabel.
Beispiel 1: Analyse von

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$ ← y-Achsenabschnitt

Die Erstellung einer qualitativen Skizze des Graphen von f ist noch nicht möglich. Daher werden im Folgenden die sog. **Nullstellen** der Funktion f berechnet. Die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist eines der wichtigsten Schritte für die Analyse und wird an vielen Stellen in der Analysis benötigt!

Definition 2.1: Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Hier gilt $f(x) = 0$.

- Öffnung der Parabel: positiv / negativ
- Stauchung/Streckung: $|a| > 1$: gestreckt in y-Richtung; $0 < |a| < 1$: gestaucht; $a = 1$ (verschobene) Normalparabel ← $f(x) = x^2$

Betrag von −4: $|-4| = 4$; $|4| = 4$

Nullstellen:
Ansatz: $f(x) = 0$

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad |:2$ (erst jetzt PQ)
$1x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$
$= -1 \pm \sqrt{1+3}$
$= -1 \pm 2$
$x_1 = -1+2$ oder $x_2 = -1-2$
$x_1 = 1$ oder $x_2 = -3$

Skizze:

Definition 2.2: PQ-Formel

Hat die quadratische Gleichung die Form $x^2 + p\cdot x + q = 0$, dann ergeben sich die Nullstellen mittels PQ-Formel zu:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sind die Nullstellen einer quadratischen Funktion bekannt, kann man direkt den Scheitelpunkt S der Parabel angeben:

$$S\left(-\frac{p}{2} \mid \quad\right)$$

$S(-1\mid-8)$; $f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 6 = 2 - 4 - 6 = -8$

Beispiel 2: Analyse von

$$f(x) = 2x^2 - 4x$$

Nullstellen:
$f(x) = 0$
$2x^2 - 4x = 0 \quad |:2$
$x^2 - 2x = 0 \quad |PQ$
$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 0}$
$= 1 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 2$

ODER Ausklammern!
$2x^2 - 4x = 0$
$x\cdot(2x - 4) = 0$ Produkt!
$x = 0$ oder $2x - 4 = 0$; $2x = 4$; $x = 2$

Scheitelpunkt:
$S(1\mid-2)$
$f(1) = 2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 = 2 - 4 = -2$

Skizze:

1.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome) höheren Grades

Der Grad eines Polynoms ist durch die höchste im Funktionsterm vorkommende Potenz festgelegt. Lösungen von Aufgabe 1 des ersten Übungsblatts:

Aufgabe 1 (+ Skizze von c) + b))

Ermitteln Sie die Nullstellen von...

b) (i) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$
c) (ii) $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x$
a) (iii) $f(x) = \frac{1}{4}x - 16$
(iv) $f(x) = 2(x-3)(x+2)(x-1)$
d) (v) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$

bis 18:25 Uhr

$f(x) = \frac{1}{4}x - 16$

Nullstellen:
$\frac{1}{4}x - 16 = 0$
$\frac{1}{4}x = 16$
$x = 16\cdot\frac{4}{1}$
$x = 64$

Skizze:

nach unten geöffnet

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$

Nullstellen:
$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0 \quad |:(-\frac{1}{2})$
$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad |PQ$
$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9}$
$= 3 \pm \sqrt{0}$
$x_{1,2} = 3$ (doppelte NS!) ↳ x-Achse wird nur berührt!

Scheitelpunkt:

Skizze:

keine NS; PQ: $\sqrt{-4}$

Polynom 3. Grades

$f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x$

Nullstellen:
$-2x^3 - 2x^2 + 12x = 0$
$x\cdot(-2x^2 - 2x + 12) = 0$
$x = 0$ oder $-2x^2 - 2x + 12 = 0 \quad |:(-2)$
$x^2 + x - 6 = 0 \quad |PQ$
$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$
$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$
$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$
$x_1 = -3$ oder $x_2 = 2$

Randverhalten:

Skizze: von oben; linker Rand $x \to -\infty$; rechter Rand $x \to +\infty$; nach unten

Merke:

Das Randverhalten eines Polynoms ist durch die höchste vorkommende Potenz bestimmt. Polynome verlaufen an der Rändern immer gegen Unendlich!!!

Lim ≙ Limes, Grenz; hier: $-2x^3$

Betrachte Grenzwert für $x \to -\infty$ gegen

linker Rand: $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ (auf x-Achse nach links)

rechter Rand: $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

In Gedanken: z.B. $x = -100$ einsetzen: $-2\cdot(-100)^3 = -2\cdot(-1000000) = +2000000$

z.B. $x = +100$: $-2\cdot 100^3 = -2\cdot 1000000 = -2000000$

allgemein: höchste Potenz: $a\cdot x^n$

	n ungerade (x^1, x^3, x^5)	n gerade (x^2, x^4, x^6)
a positiv	von: $-\infty$; nach: $+\infty$	von: $+\infty$; nach: $+\infty$
a negativ	von: $+\infty$; nach: $-\infty$	von: $-\infty$; nach: $-\infty$
⇒ Nullstellen	mind. 1 NS; maximal n NS	keine; maximal n NS

$x^2 + 1$

$f(x) = 2x^3 - 4x^2$

Nullstellen:
$2x^3 - 4x^2 = 0$
$x^2\cdot(2x - 4) = 0$
$x^2 = 0$; $x\cdot x = 0$; $x = 0$ (doppelte NS)
$2x - 4 = 0$; $2x = 4$; $x = 2$ einfache NS

Randverhalten:

Skizze:

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

$f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

$z = x^2$; $z\cdot z = x^2\cdot x^2 = x^4$

Nullstellen:
$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
Substituiere (ersetze) $z = x^2$
$z^2 - 7z + 12 = 0$ PQ
Resubstitution: $z_1 = 4$; $x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
$z_2 = 3$; $x^2 = 3 \quad |\sqrt{\ }$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}7$

Randverhalten:

Skizze: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

Symmetrie:

achsensymmetrisch bzgl. y-Achse: ⇒ nur gerade Exponenten vorkommen ✓
punktsymmetrisch bzgl. Ursprung ⇒ " ungerade " "
keine ⇒ gemischt!

Linearfaktorzerlegung! · Linearfaktor zur NS $x = 3$

$f(x) = 2(x-3)(x+2)(x-1) = 2x^3 + \ldots$

Nullstellen: ablesbar!
$x = 3 \quad x = -2 \quad x = 1$

Randverhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

Skizze: $f(0) = 2\cdot(-3)\cdot 2\cdot(-1)$; 12

Definition 3.1: Linearfaktorzerlegung

Die hier angegebene Darstellungsform wird als Linearfaktorzerlegung eines Polynoms bezeichnet und kann unter Kenntnis der Nullstellen einfach aufgestellt werden. Würde man die Linearfaktorzerlegung wieder „ausmultiplizieren“ und zusammenfassen, gelangt man zu der bereits bekannten allgemeinen Darstellungsform.

Die Linearfaktorzerlegungen für die vorigen Beispiele lauten:

Nullstellen:
$x = 3$ doppelt: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\cdot(x-3)\cdot(x-3) = -\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2$
$x = 64$: $f(x) = \frac{1}{4}x - 16 = \frac{1}{4}\cdot(x-64)$
$x = 0, x = -3, x = 2$: $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 12x = -2\cdot(x-0)\cdot(x+3)\cdot(x-2)$
$x = 0$ doppelt, $x = 2$: $f(x) = 2x^3 - 4x^2 = 2\cdot x^2\cdot(x-2)$

Probe: $-\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2$ — 2. Bin. Formel $(a-b)^2$
$-\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$ ($a^2 - 2ab + b^2$)

Weiterführendes Beispiel: Nullstellen von

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Problem: Das Ausklammern von x ist hier nicht möglich!

Gleichungen dieser Art kann man mittels Polynomdivision oder Horner-Schema versuchen zu lösen. Dazu muss zunächst eine Nullstelle bekannt sein, die man durch Probieren herausfinden muss:

1. Schritt: Raten einer Nullstelle. prüfe $x = 1$: $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ ✓

Tipp: Alle ganzzahligen Teiler der Konstanten $+6$, also $\pm 1\ \pm 2\ \pm 3\ \pm 6$ könnten Kandidaten für Nullstellen sein.
2. Schritt: Durchführung der Polynomdivision
Da nun eine Nullstelle bekannt ist, kann man die Linearfaktorzerlegung zum Teil angeben:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (x - 1)\cdot(\ldots?\ldots) \quad |:(x-1)$$
$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = (\ldots?\ldots)$$

Polynomdivision:

$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$
$-(x^3 - 1x^2)$
$-1x^2 - 5x$
$-(-1x^2 + 1x)$
$-6x + 6$
$-(-6x + 6)$
0 ✓

Restpolynom jetzt mit ⇒ PQ-Formel lösbar
$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$

$144 : 3 = 48$; -12; 24; -24; 0 ✓

Ziel der Polynomdivision ist letztlich die Reduzierung des Grades, so dass man auf das Restpolynom die bekannten Lösungsverfahren anwenden kann. Man kann die Polynomdivision „umgehen“, indem man das sogenannte Horner-Schema anwendet. Neben der schnellen Auswertung von Funktionswerten erhält man (beim Finden einer Nullstelle) direkt die Koeffizienten des Restpolynoms:
Horner-Schema:

Horner–Schema:
Eine effiziente Berechnungsmethode für Funktionswerte von Polynomen durch geeignete Klammerung:

$$P_n(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots)x + a_0$$

bzw. schematisch

a_k	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
$\times x^*$	↓	xb_n	xb_{n-1}		…	xb_1
Σ	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	…	b_1	$b_0 = P_n(x^*)$

mittels Horner-Schema

	x^3	x^2	x	const
Eingabe	1	−2	−5	+6
$x = 1$		1	−1	−6
	1	Σ −1	Σ −6	Σ 0 ✓ also NS!
Vorfaktoren des Restpolynoms	x^2	x	const	y-KO

$x^2 - x - 6 = 0$ siehe oben

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen mittels Hornerschema:
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12$ Lösung: x=1,x=2,x=-6
b) $f(x) = x^3 - 7x - 6$ Lösung: x=-2,x=-1,x=3

a)

	x^3	x^2	x	const
	1	3	−16	12
$x = 1$		1	4	−12
	1	4	−12	0 ✓ Nullstelle (y-KO)

$1x^2 + 4x - 12 = 0$ PQ-Formel

b) fehlt x^2

	x^3	x^2	x	const
	1	0	−7	−6
$x = -2$		−2	4	6
	1	−2	−3	0 ✓

Restpolynom: $1x^2 - 2x - 3 = 0$

2 Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion f, deren Funktionsterm ein Bruch ist, wobei Zähler und Nenner jeweils Polynome sind, heißt gebrochen-rationale Funktion.
Ein einfaches Beispiel zu Beginn:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

Definitionslücke, hier eine sog. Polstelle (≙ senkrechte Asymptote, die den Graph in zwei Teile trennt)

Neu! Definitionsbereich:
NS vom Nenner (dürfen nicht eingesetzt werden): $x + 1 = 0$; $x = -1$
$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ "ohne"

Nullstellen:
(falls Zähler = 0 ist) $f(x) = 0$; $2x - 1 = 0$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$

y-Achsenschnitt: $f(0) = \frac{2\cdot 0 - 1}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$

Neu! Asymptote(Randverhalten):
Polynomdivision Zähler : Nenner ⇒ i.A. bleibt ein Rest über!

$(2x - 1) : (x + 1) = \boxed{2} + \frac{-3}{(x+1)}$
$-(2x + 2)$
(-3) Rest

Asymptote $a(x) = 2$ (Konstante Funktion)

Skizze: Polstelle

Merke:

Das Randverhalten einer gebrochen-rationalen Funktion f wird durch die sogenannte Asymptote bestimmt. Die Asymptote ist selbst eine Funktion, dessen Funktionsterm sich durch den “ganzzahligen Anteil “der Polynomdivision von “Zähler : Nenner “ergibt. Der Graph von f nähert sich im Unendlichen immer mehr dem Graph der Asymptote, zuvor kann der Graph von f die Asymptote auch schneiden oder berühren.

Ein ausführlicheres Beispiel zum Schluss:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^2 - x - 6}$$

Neu! Definitionsbereich:

Neu! Ersatzfunktion, Art der Definitionslücke:
$f(x) = \frac{2x^3+2x^2-4x}{x^2-x-6} =$

Nullstellen:

Skizze:

y-Achsenschnitt:

Neu! Asymptote(Randverhalten):

Merke:

Erstellt man für Zähler und Nenner jeweils die Linearfaktorzerlegung, kann man daraus wichtige Eigenschaften der Funktion f erkennen:

1. Es liegt eine Nullstelle vor, wenn nur das Zählerpolynom diese Nullstelle hat. Haben Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen, muss man deren Vielfachheit betrachten.
2. Ist die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners kleiner oder gleich der des Zählers, liegt eine hebbare Definitionslücke vor. Dort hat der Graph ein ”Loch”, der fehlende Funktionswert kann durch den Funktionswert der gekürzten Linearfaktorzerlegung (der sog. Ersatzfunktion f^*) behoben werden.
3. Ansonsten liegt eine Polstelle (im Prinzip eine senkrechte Asymptote) vor, bei diesen Definitionslücken laufen die Funktionswerte gegen unendlich, wenn man sich ihnen von links oder rechts nähert (ein sog. Unendlichkeitsstelle). In der Ersatzfunktion f^* gilt, bei gerader Vielfachheit der Nennernullstelle liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (Annäherung auf beiden Seiten entweder gegen $+\infty$ oder $-\infty$), bei ungerader Vielfachheit liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor (auf der einen Seite gegen $+\infty$ und auf der anderen gegen $-\infty$ bzw. umgekehrt).