21.08.2024

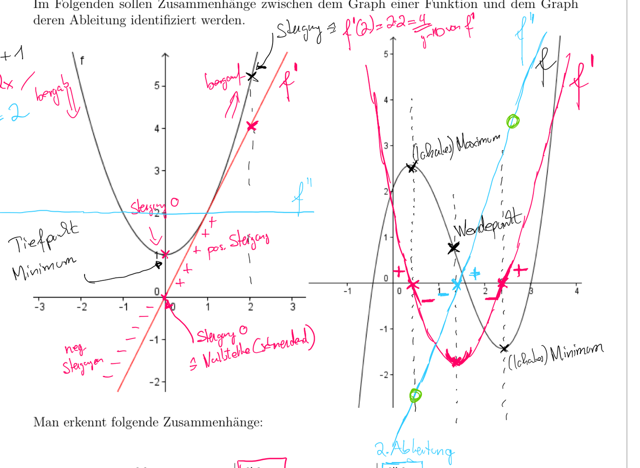
Dienstag, 20. Februar 2024 21:32

5 Differentialrechnung Teil 2

5.1 Graphisches Ableiten

Im Folgenden sollen Zusammenhänge zwischen dem Graph einer Funktion und dem Graph deren Ableitung identifiziert werden.

$f(x) = x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$



Im Wendepunkt..
- ist Steigung lokal extremal (am größten/kleinsten), d.h. hier geht es am steilsten bergauf/bergab
- hier ändert sich die sog. Krümmung des Graphen ("Straßenverlauf") von Links- nach Rechtskrümmung bzw. umgekehrt!

bis 17:40 Blatt 4 1+2

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

f hat	f' hat	f'' hat (2. Ableitung)
ein Maximum	" " " von +/− (VZW von nach)	negativen Wert
ein Minimum	eine schneidende NS von −/+	positiven Wert
ein Wendepunkt	ein Minimum/Maximum	eine schneidende NS −/+ bzw +/−
ein Sattelpunkt	eine berührende NS (MIN/MAX auf x-Achse)	"

H.B.: über 2. Ableitung

5.2 Berechnung von Extrema

Die zuvor festgestellten Zusammenhänge werden nun für die Berechnung von Extrema verwendet, am Beispiel von:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad , f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad , f''(x) = 6x - 12$$

① **Notwendige Bedingung:**

Steigung = 0

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad |:3$ Nullstellen von f'
$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad$ |PQ
$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$
$\Rightarrow x_1 = 1$ oder $x_2 = 3$ (x-KO von möglichen Hoch- bzw. Tiefpunkten)

② **Hinreichende Bedingung:** ⇒ Entscheidung Hoch-Tief oder SP

1. Möglichkeit mittels Vorzeichenwechselkriterium von f'

untersuche $x_1 = 1$: Steigung davor: $f'(0) = 3\cdot 0^2 - 12\cdot 0 + 9 = +9$ positive Steigung
dahinter: $f'(2) = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$ negative Steigung ⇒ MAX

untersuche $x_2 = 3$: Steigung davor: $f'(2) = -3$
dahinter: $f'(4) = 3\cdot 4^2 - 12\cdot 4 + 9 = 48 - 48 + 9 = +9$ VZW von −/+ ⇒ MIN

2. Möglichkeit unter Verwendung der 2. Ableitung:

$f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ (bei 0 keine Aussage möglich)

untersuche $x_1 = 1$: $f''(1) = 6\cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ MAX
$x_2 = 3$: $f''(3) = 6\cdot 3 - 12 = +6 > 0 \Rightarrow$ MIN

③ **Berechnung der y-Koordinate:**

Für $x_1 = 1$: $f(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 = 4 \Rightarrow$ MAX(1|4)
Für $x_2 = 3$: $f(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 = 27 - 54 + 27 = 0 \Rightarrow$ MIN(3|0)

5.3 Berechnung der Wendepunkte

① **Notwendige Bedingung:**

$f''(x) = 0$ Nullstellen von f''
$6x - 12 = 0$
$6x = 12$
$x = 2$ (x-KO von WP)

② **Hinreichende Bedingung:**

$f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = 6 \neq 0$ ✓ ⇒ WP

③ **Berechnung der y-Koordinate:**

$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow$ WP(2|2)

6 Weitere Funktionen und Ableitungsregeln

6.1 Die e-Funktion

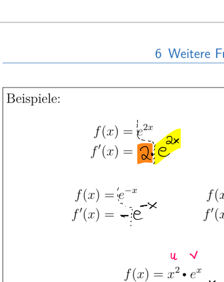
$f(x) = 2^x$ (Basis, Exponent) oder $f(x) = 3^x$

Die e-Funktion ist eine Exponentialfunktion mit Basis $e \approx$ 2,71..., der sog. Euler'schen Zahl, benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler.

$f(x) = e^x$

Abbildung 6.1: Leonhard Euler [9], 1707-1783

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der e-Funktion sind:
D= $\mathbb{R}$
W= $\mathbb{R}_{>0}$ nur positive reelle Zahlen ⇒ keine NS
$f'(x) = e^x$

Merke:

Für die Ableitung der e-Funktion gilt:
Die e-Funktion bleibt unverändert, davor schreibt man die Ableitung des Exponenten als Faktor (siehe Kettenregel).

Beispiele:

$f(x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2\cdot e^{2x}$
$f(x) = e^{3x+1}$, $f'(x) = 3\cdot e^{3x+1}$
$f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = 2x\cdot e^{x^2}$
$f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$
$f(x) = e^{2x} + x^2 + 4x$, $f'(x) = 2e^{2x} + 2x + 4$
$f(x) = x^2 + e^x$, $f'(x) = 2x + e^x$
$f(x) = x^2 \cdot e^x$, $f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

($f(x) = 5\cdot e^{2x}$, $f'(x) = 5\cdot 2e^{2x} = 10e^{2x}$)

in dem in beiden Faktoren die Variable x vorkommt

Ein Produkt von zwei Funktionstermen kann nicht einfach einzelnd, wie bei einer Summe, abgeleitet werden:

$$f(x) = x^2 + e^{4x} \qquad f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$$

Definition 1.1: Produktregel

Die Funktionen u und v seien im gemeinsamen Definitionsbereich überall differenzierbar. Dann gilt:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

Beispiele:

$f(x) = e^{2x} \cdot 4x$
$f'(x) = 2e^{2x}\cdot 4x + e^{2x}\cdot 4$
$f'(x) = e^{2x}\cdot(2\cdot 4x + 4)$
$f'(x) = e^{2x}\cdot(8x+4)$

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot(-e^{-x})$
$= e^{-x}\cdot(2x - x^2)$

$f(x) = (x^2 - 2x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$
$f'(x) = (2x-2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x^2-2x)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$
$= e^{\frac{1}{2}x}\left((2x-2) + (x^2-2x)\cdot\frac{1}{2}\right)$
$= e^{\frac{1}{2}x}\left(2x - 2 + \frac{1}{2}x^2 - x\right)$
$= e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 2\right)$

$f(x) = e^{2x+1}\cdot(x-3)$
$f'(x) = 2e^{2x+1}\cdot(x-3) + e^{2x+1}\cdot 1$
$f'(x) = e^{2x+1}\cdot(2\cdot(x-3) + 1)$
$= e^{2x+1}\cdot(2x-5)$

Extrema: ① N.B. $f'(x) = 0$
$e^{2x}\cdot(8x+4) = 0$
$8x + 4 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$
oder $e^{2x} = 0$ f.L.

Damit man mit der ersten Ableitung weiter rechnen kann (um beispielsweise Extrema zu bestimmen), klammert man den e-Term aus.
Übung: Klammern Sie in den Ableitungen aus obiger Übung jeweils den e-Term aus.

Exkurs: Gewinnung der Euler'schen Zahl aus der Tangente an der Stelle $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Für eine allgemeine Exponentialfunktion mit Basis $a > 0$ gilt: $f(x) = a^x$ (Potenzgesetz $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$)

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\cdot(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$

1. müsste 1 sein, wenn die Ableitung wieder die Funktion selbst sein soll!
2. Für welche Basis a ist dies der Fall

Idee!

$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} \stackrel{!}{=} 1$
$\frac{a^h - 1}{h} = 1 \quad |\cdot h$
$a^h - 1 = h \quad |+1$
$a^h = h + 1 \quad |^{\wedge}(\frac{1}{h})$
$(a^h)^{\frac{1}{h}} = (h+1)^{\frac{1}{h}}$
$a = (h+1)^{\frac{1}{h}}$
also $a = \lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$

für $h = 0{,}1 \Rightarrow a = 2{,}5937...$
$h = 0{,}01 \Rightarrow a = 2{,}70481$
$h = 0{,}001 \Rightarrow a = 2{,}716923$
$h = 0{,}0001 \Rightarrow a = 2{,}718145$
$h = 0{,}00001 \Rightarrow a = 2{,}718268$
$a = e$ (Euler'sche Zahl)

also $e \approx \lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$

man findet dies oft in folgender Form, $\frac{1}{h} = n \Leftrightarrow \frac{1}{n} = h$

$e \approx \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$

$\boxed{e \approx \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ Definition über Grenzwert!

Wie ist die Basis a zu wählen, damit dieser Grenzwert 1 ergibt? Zunächst wird der Grenzwert anders notiert, indem h durch $\frac{1}{n}$ ersetzt wird.

Lässt man nun $n \to \infty$ laufen, ergibt sich als gesuchte Basis und als mögliche Definition der Euler'schen Zahl e:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\approx 2{,}71...$

$\lg = \log_{10}$

6.2 Die ln-Funktion

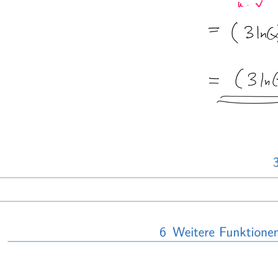
$\log_e \hat{=} \ln$

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist eine sog. Logarithmusfunktion zur Basis e (natürlicher Logarithmus) und die Umkehrfunktion der e-Funktion.

Merke:

Die Umkehrfunktion entsteht graphisch, wenn man den monoton steigenden (bzw. fallenden) Bereich (nur hier ist eine Funktion umkehrbar, vgl. $f(x) = x^2$) an der Geraden $g(x) = x$ spiegelt. Rechnerisch erhält man diese durch Vertauschen von x und y und möglicher Umformung nach y.

Skizze:



Wichtige Eigenschaften der ln-Funktion sind:
D= $\mathbb{R}_{>0}$ (nur positive Zahlen einsetzbar!)
W= $\mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{1}{x}$

6.2.1 Ableitung besonderer Formen von Exponentialfunktionen

Falls die Variable im Exponenten und/oder in der Basis vorkommt, kann man die Funktion wie folgt als e-Funktion schreiben und dann ableiten:

$f(x) = (x)^{3x}$

Trick: $= \left(e^{\ln(x)}\right)^{3x} = e^{3x\cdot\ln(x)}$ (3. Log-Gesetz $\log_a u^v = v\cdot\log_a u$)

$f'(x) = (3x\cdot\ln(x))'\cdot e^{3x\cdot\ln(x)}$
$= \left(3\cdot\ln(x) + 3x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot e^{3x\cdot\ln(x)}$
$= (3\ln(x) + 3)\cdot e^{3x\cdot\ln(x)}$
$= (3\ln(x) + 3)\cdot(x)^{3x}$

6.3 Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich an der Stelle x differenzierbar und es gilt $v(x) \neq 0$, dann gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$f(x) = \frac{(2x+1)}{(x^2-4)}$

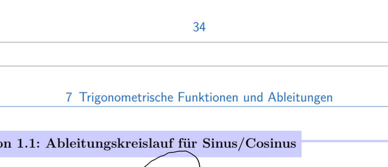
$f'(x) = \frac{2\cdot(x^2-4) - (2x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2 - 8 - (4x^2+2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 8}{(x^2-4)^2}$

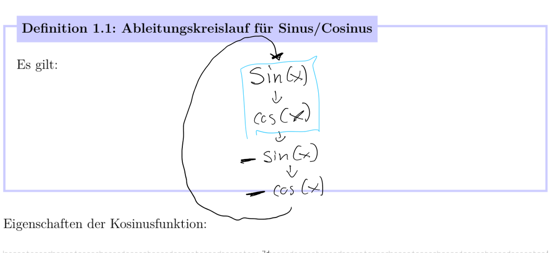
7 Trigonometrische Funktionen und Ableitungen

7.1 Die $sin(x)$-Funktion

Die Sinusfunktion $f(x) = sin(x)$ ist eine sogenannte trigonometrische Funktion. Man erhält den Graphen, indem man abhängig von dem Winkel x, der auf der x-Achse abgetragen wird, die Länge der Gegenkathete des Winkels x im Einheitskreis, also den $sin(x)$, als y-Wert einträgt (vgl. Animation auf Wikipedia [11]):

$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90°$
$\pi \hat{=} 180°$
$2\pi \hat{=} 360°$





Eigenschaften der Sinus-Funktion:

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$	Nullstellen: $x_N = n\cdot\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (alle Vielfachen von π)
Wertebereich: $[-1; 1]$ beschränkt	Extremstellen: $x_E = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$
y-Achsenschnitt: $S_y(0\|0)$	Wendestellen: siehe NS
Symmetrie: punktsymmetrisch	

Durch Graphisches Ableiten erkennt man, dass gilt: $f'(x) = \cos(x)$

Definition 1.1: Ableitungskreislauf für Sinus/Cosinus

Es gilt:

$\sin(x) \rightarrow \cos(x) \rightarrow -\sin(x) \rightarrow -\cos(x)$

Eigenschaften der Kosinusfunktion:

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$	Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$
Wertebereich: $[-1; 1]$	Extremstellen: $x_E = n\cdot\pi$
y-Achsenschnitt: $S_y(0\|1)$	Wendestellen: $x_W = x_N$
Symmetrie: achsensymmetrisch	

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

$f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = 10\sin(x)$, $f'(x) = 10\cos(x)$
$f(x) = e^x\cdot\sin(x)$, $f'(x) = e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x) = e^x\cdot(\sin(x) + \cos(x))$

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

$f(x) = \sin(x^2)$ (äußere Funktion, innere Funktion)
$f'(x) = 2x\cdot\cos(x^2)$ (innere Abl.)

$f(x) = \sin^2(x) = (\sin(x))^2 = \sin(x)\cdot\sin(x)$
$f'(x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cdot\cos(x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$
ODER mittels Kettenregel
$f(x) = (\sin(x))^2$
$f'(x) = \cos(x)\cdot 2(\sin(x))^1 = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

$f(x) = \tan(x) \underset{Def}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$
$= \frac{1}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$= \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + (\tan(x))^2 = 1 + \tan^2(x)$

Pythagoras am Einheitskreis: $1^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

Definition 1.2: Kettenregel

Mittels der Kettenregel lässt sich die Ableitung zweier miteinander verketteter, differenzierbarer Funktionen f und g bestimmen. Es gilt:

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

Merke: Innere Ableitung · äußere Ableitung (mit innerer Funktion eingesetzt).

Übungen zur Ableitung von Trigonometrischen Funktionen:

auch die Merkregel zum Ableiten der e-Fkt ist die Kettenregel angewandt!

$f(x) = (3x+1)^5$, $f'(x) = 3\cdot 5(3x+1)^4$ (innere Abl. · äußere Abl. (mit innerer Fkt eingesetzt))

$f(x) = e^{x^2+2x}$, $f'(x) = (2x+2)\cdot e^{(x^2+2x)}$ (innere Abl.)